2009 개정 교육과정
인천광역시교육감 인정
고교-04-140-04-13

고|등|학|교

미적분 Ⅱ

신항균
이광연
박세원
신범영
이계세
김정화
박문환
윤정호
박상의
서원호
전제동
이동흔

(주)지학사

교과서 물려주기 기록표

연도	교과서 사용자				상태
	학년	반	번호	이름	

※ 상태 표기 예시: 매우 좋음, 좋음, 보통, 나쁨

고|등|학|교

미적분 Ⅱ

(주)지학사

들어가는 말

수학은 오랜 옛날부터 문명의 발달에 핵심적인 역할을 해왔으며 앞으로도 이와 같은 수학의 역할은 더욱 확대될 것이다. 특히 현재의 지식 정보화 사회에서의 신기술은 수학의 뒷받침 없이는 얻어질 수 없다. 실제로 수학은 우주, 항공, 컴퓨터 과학과 같은 자연 과학은 물론이고 경제, 경영 등과 같은 인문 · 사회 과학에도 폭넓게 이용되고 있다. 또한 현대 문명을 합리적으로 운영하고 발전시켜 21세기를 살아가는 우리에게 창조적이고 논리적인 아이디어를 제공하는 기초가 되고 있다.

수학을 공부하는 목적은 단순히 수학의 기본 지식을 습득하는 데에서 벗어나 사물의 현상을 수학적으로 관찰하고 해석함으로써 실생활의 여러 가지 문제에 적극적으로 대처하고 합리적이고 논리적으로 해결하는 능력을 기르는 데 있다.

이런 목적을 달성하기 위하여 이 책은 전인적 성장의 기반 위에 개성의 발달과 진로를 개척하는 사람, 기초 능력의 바탕 위에 새로운 발상과 도전으로 창의성을 발휘하는 사람, 문화적 소양과 다원적 가치에 대한 이해를 바탕으로 품격 있는 삶을 영위하는 사람, 세계와 소통하는 시민으로서 배려와 나눔의 정신으로 공동체 발전에 참여하는 사람을 육성하려는 마음가짐으로 새롭게 개정된 교육과정에 맞게 만들었다.

특히 학생들이 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 현상을 수학적으로 생각하고, 주어진 문제를 창의적이고 합리적으로 해결하는 능력을 기를 수 있도록 하기 위하여 다음과 같은 사항에 중점을 두고 엮었다.

첫째, 수학적 개념과 원리를 이해하고 기초 계산을 숙달하게 할 뿐만 아니라 학생의 추론 능력, 문제 해결 능력 그리고 의사소통 능력을 발달시킬 수 있도록 하였다.

둘째, 생각 열기를 통하여 자신을 둘러싼 세계에 대한 경험을 토대로 다양한 문화와 가치에 대한 이해를 넓히고, 탐구 활동을 통하여 스스로 수학을 체험하게 함으로써 학생들이 자연스럽게 수학적 내용을 이해할 수 있도록 하였다.

셋째, 심신의 건강하고 조화로운 발달을 추구하며, 다양한 분야의 경험과 지식을 익혀 적극적으로 진로를 탐색할 수 있도록 하였으며, 흥미와 더불어 수학의 아름다움을 발견하고 수학의 유용성을 느낄 수 있도록 하였다.

본래 수학은 암기만으로는 좋은 학습 성과를 거둘 수 없고, 학생 스스로가 문제를 해결하고자 노력할 때 비로소 원리나 법칙 등이 심도 있게 이해되고 학습에 흥미도 느끼게 되는 과목이다. 이 책이 스스로 문제를 해결하려는 학생들에게 좋은 길잡이가 되기를 기대한다. 또 이 책으로 수학 실력을 키워 오늘날의 정보화와 세계화 시대에 걸맞은 창조적이고 지혜로운 사람으로 성장하기 바란다.

지은이 씀

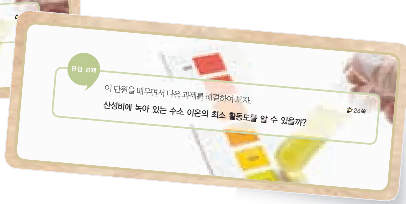
이 책의 짜임새

대 단 원　도 입

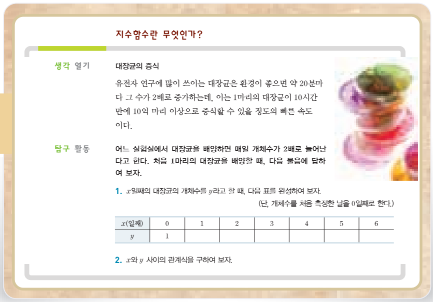
단원과 관련된 사진을 제시하고 관련 내용을 소개함으로써 단원 학습의 흥미와 관심을 높였다. 또 앞서 배운 내용과 단원의 연계성 확인을 위한 문제를 제시하였다.

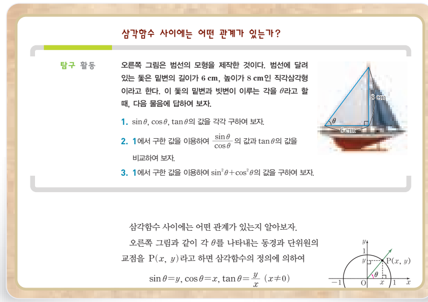
중 단 원　도 입

새로운 학습을 시작하면서 다른 교과나 실생활과 관련된 내용을 스토리텔링 형식으로 소개하고 수학적 사고를 유발하는 물음을 제시하여 학습 동기를 유발하도록 하였다.



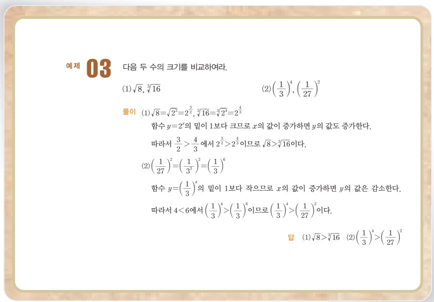
본 문　전 개





생각 열기 / 탐구 활동

본격적인 학습에 앞서 스토리텔링으로 흥미를 이끌어 내고, 새로 도입할 수학 원리의 탐구를 통해 학습 내용의 실마리를 제공하였다.

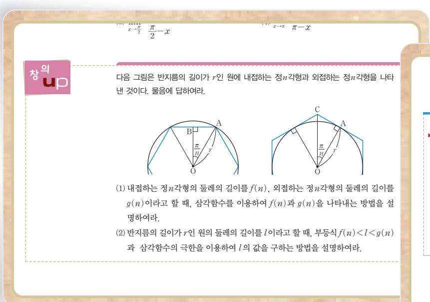


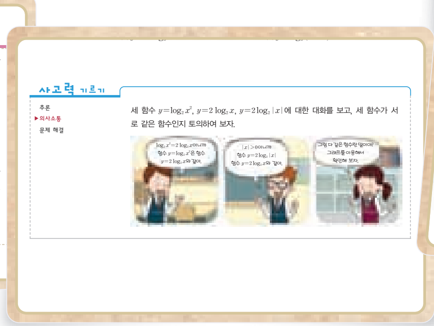
예제 / 문제

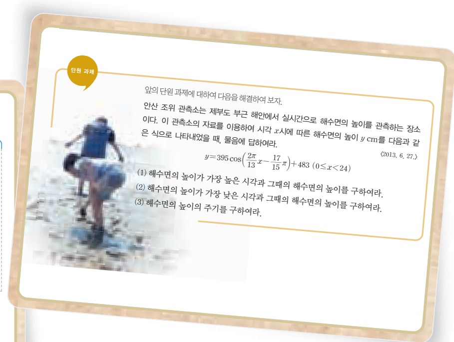
대표적인 유형의 문제로 개념 이해를 탄탄히 하고, 유사 문제를 해결할 수 있도록 하였다.

창의 UP / 사고력 기르기 / 단원 과제

수학의 개념을 깊이 생각하고 표현함으로써 창의력을 높이며, 추론, 의사소통, 문제 해결의 세 유형으로 사고력을 기르고, 중단원 도입과 관련한 구체적인 문제를 통해 생활에 적용되는 수학을 직접 느낄 수 있도록 하였다.





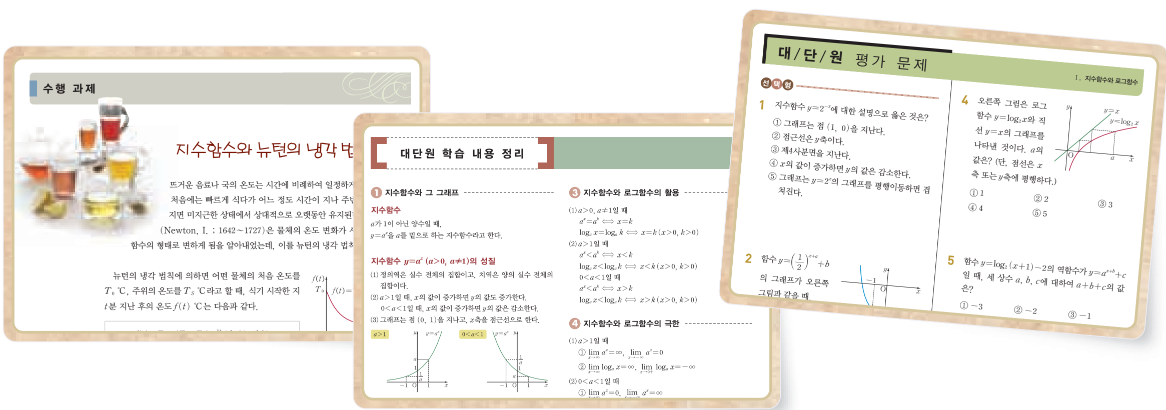


중단원 마무리

학생의 학습 수준에 맞추어 문제를 선택하여 풀게 함으로써 수준별 학습이 가능하도록 하였고, 문제와 관련된 소단원명과 학습 요소를 제시하여 본문과의 연계성을 살리고 학생 스스로 부족한 부분을 찾아 보충할 수 있도록 하였다.

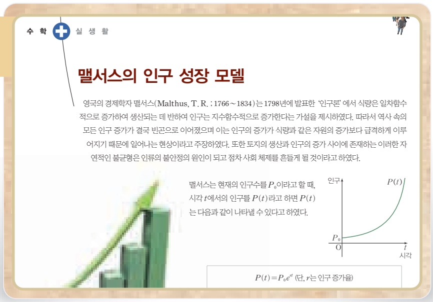
대단원 마무리

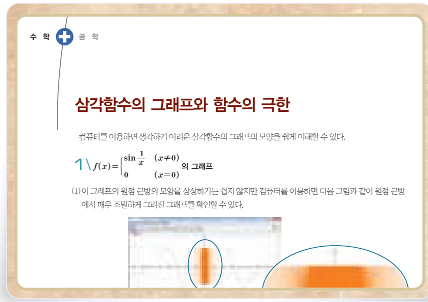
대단원 학습을 마친 후 다양한 주제에 대한 탐구로 종합적인 문제 해결력을 신장하도록 하였고, 단원에서 배운 내용을 요약 · 정리하여 학습 내용을 상기할 수 있도록 하였으며, 대단원 학습 내용을 총망라한 다양한 평가 문제를 제시하였다.



수학 플러스

교육부에서 발표한 수학 교육 선진화 방안에서 강조하는 STEAM과 관련하여 수학과 과학, 기술, 공학, 예술, 문학, 실생활, 역사 이야기 등을 소개함으로써 단원의 학습에 대한 폭넓은 이해와 확장이 가능하도록 하였다.





부록

교과서의 문제에 대한 해답을 제공하여 스스로 해결한 문제가 옳은지 확인할 수 있도록 하였다. 또 본문의 내용을 학습할 때 요구되는 여러 가지 값을 표로 제시하였다. 아울러 본문에 등장한 여러 가지 수학 용어와 기호를 찾아보기로 제공하여 학습에 도움이 되도록 하였다.

교과서 속 아이콘 활용

중③	선수 학습 내용	보기	구체적인 예시
(계산기)	계산기 활용 문제	주의	주의할 점
실생활	실생활 문제	참고	참고할 사항
발전	발전 문제		

차례

Ⅰ 지수함수와 로그함수

Ⅱ 삼각함수

III 미분법

IV 적분법

* 부록

시간이 지남에 따라 변하는 대상들이 있다.

지수함수와 로그함수

| 준 | 비 | 학 | 습 |

수학 Ⅱ 지수법칙과 로그의 성질

1 다음을 계산하여라.

(1) $9^{\frac{3}{2}}\times 27^{-\frac{2}{3}}$ (2) $\sqrt[6]{9}\div\sqrt[3]{81}$

(3) $\log_6 9+\log_6 4$ (4) $\log_2 9\times\log_3\sqrt{2}$

수학 Ⅱ 지수와 로그

2 다음 등식을 로그를 사용하여 나타내어라.

(1) $2^4=16$ (2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=27$

미적분 Ⅰ 도함수

3 도함수의 정의를 이용하여 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $f(x)=x+4$ (2) $f(x)=x^3-2$

1 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프

산성비를 맞으면 건강에 해로울까?

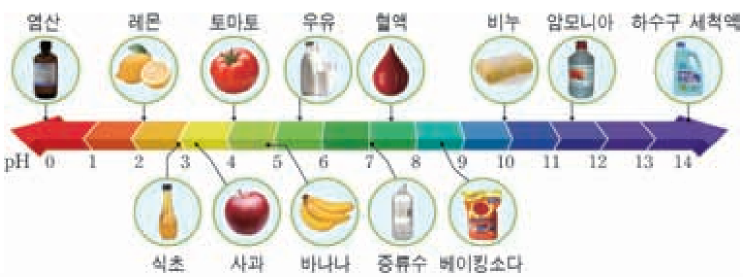
비를 맞고 나서는 몸을 따뜻하게 해야 한다. 그렇지 않으면 감기에 걸리기 쉽다. 그런데 요즘에는 비를 맞으면 안 된다는 말을 더 듣는다. 산성비 때문이다.

산성비를 맞았다고 바로 사람의 피부가 심각하게 상한다든가, 금세 우산에 구멍을 내거나 하지는 않는다. 하지만 비가 내리고 대기 오염 물질이 충분히 씻겨 내려가기 전에 산성비에 지속적으로 노출될 경우 사람이 피해를 입을 수 있다.

그런데 우리 주변에는 산성비보다 더 높은 산성을 띠는 것들이 많다.

산성비는 pH 5.6 이하의 비를 말한다. 순수한 물은 산성도가 pH 7로 중성이다.

pH 수치는 용액 속의 수소 이온의 활동도에 의해 결정된다. 그런데 수소 이온의 활동도는 용액 속의 수소 이온 농도와 거의 같은 값을 가지기 때문에 수소 이온 농도는 수소 이온의 활동도의 척도로 사용된다. 다음은 상용로그를 이용하여 여러 가지 물질의 pH를 나타낸 것이다.



단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자.

24쪽

산성비에 녹아 있는 수소 이온의 최소 활동도를 알 수 있을까?

01 지수함수와 그 그래프

● 지수함수의 뜻을 안다.
● 지수함수의 그래프를 그려 보고, 그 성질을 이해한다.

지수함수란 무엇인가?

생각 열기

대장균의 증식

유전자 연구에 많이 쓰이는 대장균은 환경이 좋으면 약 20분마다 그 수가 2배로 증가하는데, 이는 1마리의 대장균이 10시간 만에 10억 마리 이상으로 증식할 수 있을 정도의 빠른 속도이다.

탐구 활동

어느 실험실에서 대장균을 배양하면 매일 개체수가 2배로 늘어난다고 한다. 처음 1마리의 대장균을 배양할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

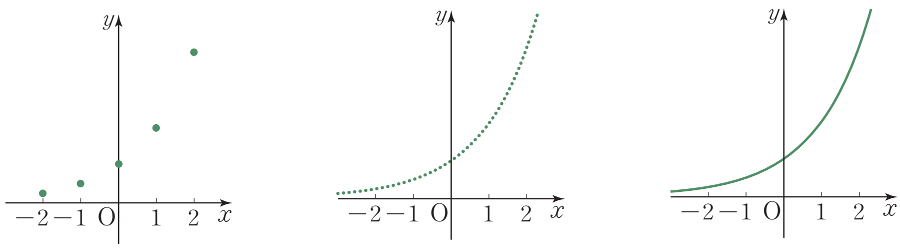
1. x일째의 대장균의 개체수를 y라고 할 때, 다음 표를 완성하여 보자.

(단, 개체수를 처음 측정한 날을 0일째로 한다.)

x(일째)	0	1	2	3	4	5	6
y	1						

2. x와 y 사이의 관계식을 구하여 보자.

실수 x에 2^x을 대응시키면 그 값은 하나로 정해지므로 $y=2^x$은 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수이다. 이 함수에서 x값에 대응하는 y값의 순서쌍 $(x,\ y)$를 좌표평면 위에 점으로 나타내고, 매끄러운 곡선으로 연결하면 다음과 같다.



위의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고, x의 값이 감소하면 y의 값은 양수이면서 0에 한없이 가까워진다. 따라서 함수 $y=2^x$의 치역은 양의 실수 전체의 집합이고, 이 함수의 그래프의 점근선은 x축이다.

곡선이 한없이 가까워지는 직선이 있을 때, 이 직선을 곡선의 점근선이라고 한다.

함수 $y=a^x$에서 $a=1$이면 모든 실수 x에 대하여 $y=1^x=1$이므로 $y=a^x$은 상수함수가 된다. 따라서 지수함수에서는 밑이 1이 아닌 양수인 경우만 생각한다.

일반적으로 $a>0$이고 $a\neq1$일 때, 실수 x에 a^x의 값을 대응시키면 각각의 x에 대하여 a^x의 값이 단 하나로 정해지므로 $y=a^x$은 x의 함수이다. 이와 같이 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수

$$y=a^x\ (a>0,\ a\neq1)$$

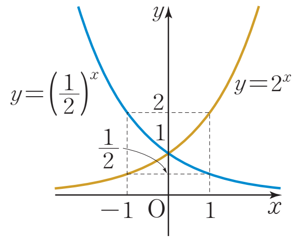
을 a를 밑으로 하는 **지수함수**라고 한다.

예제 01 지수함수 $y=2^x$의 그래프를 이용하여 지수함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 그려라.

$y=f(-x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 y축에 대하여 대칭이다.

풀이 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=(2^{-1})^x=2^{-x}$이므로 이 함수의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



문제 1 다음 지수함수의 그래프를 그려라.

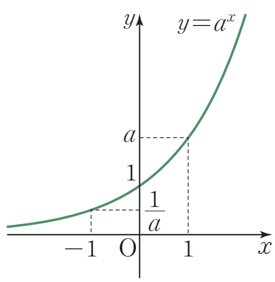
(1) $y=3^x$　　(2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

일반적으로 $a>1$일 때 x의 값이 증가하면 a^x의 값도 증가하고, $0<a<1$일 때 x의 값이 증가하면 a^x의 값은 감소하고 양의 실수이면서 0에 한없이 가까워진다.

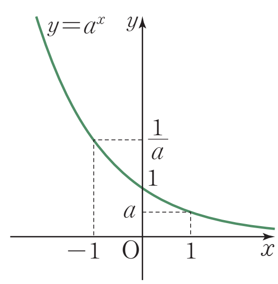
또한 두 함수 $y=a^x$과 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

따라서 지수함수 $y=a^x\ (a>0, a\neq1)$의 그래프는 a값의 범위에 따라 다음과 같다.

$a>1$



$0<a<1$



이상을 정리하면 다음과 같다.

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 성질

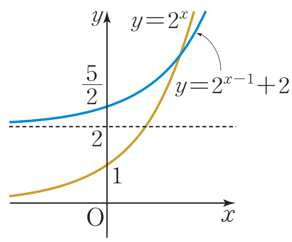
(1) 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.
(2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
(3) 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나고, x축을 점근선으로 한다.

예제 02

지수함수 $y=2^x$의 그래프를 이용하여 함수 $y=2^{x-1}+2$의 그래프를 그려라.

$y=f(x-a)+b$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다.

풀이 함수 $y=2^{x-1}+2$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 함수 $y=2^{x-1}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



문제 2

다음 함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=-3^{x-1}$

(2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-\frac{1}{2}$

발전

문제 3

지수함수 $y=2^x$의 그래프를 이용하여 함수 $y=8\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 그려라.

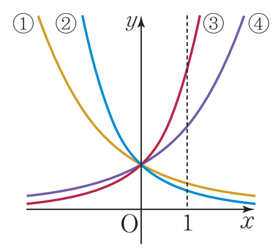
사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

오른쪽 그림은 지수함수

$$y=2^x,\quad y=3^x,\quad y=\left(\frac{1}{2}\right)^x,\quad y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$$

의 그래프를 나타낸 것이다. 이 지수함수의 그래프를 나타내는 것을 각각 찾고, 이를 통해 알 수 있는 지수함수의 그래프의 성질에 대하여 토의하여 보자.



예제 03

다음 두 수의 크기를 비교하여라.

(1) $\sqrt{8},\ \sqrt[3]{16}$ (2) $\left(\frac{1}{3}\right)^4,\ \left(\frac{1}{27}\right)^2$

풀이 (1) $\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2^{\frac{3}{2}},\ \sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^4}=2^{\frac{4}{3}}$

함수 $y=2^x$의 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 $\frac{3}{2}>\frac{4}{3}$에서 $2^{\frac{3}{2}}>2^{\frac{4}{3}}$이므로 $\sqrt{8}>\sqrt[3]{16}$이다.

(2) $\left(\frac{1}{27}\right)^2=\left(\frac{1}{3^3}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^6$

함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 $4<6$에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^4>\left(\frac{1}{3}\right)^6$이므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^4>\left(\frac{1}{27}\right)^2$이다.

답 (1) $\sqrt{8}>\sqrt[3]{16}$ (2) $\left(\frac{1}{3}\right)^4>\left(\frac{1}{27}\right)^2$

문제 4

다음 두 수의 크기를 비교하여라.

(1) $\sqrt[5]{3},\ \sqrt[4]{9}$ (2) $\sqrt[9]{0.5^{10}},\ \sqrt[10]{0.5^9}$

예제 04

정의역이 $\{x\,|\,-2\le x\le 1\}$인 함수 $y=2^{x+2}-1$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

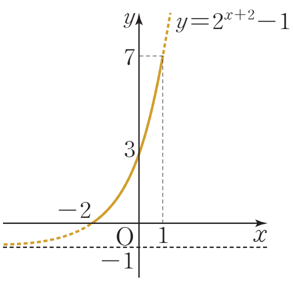
풀이 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=2^{x+2}-1$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 함수 $y=2^{x+2}-1$은

$x=-2$일 때 최솟값 $2^{-2+2}-1=0$,

$x=1$일 때 최댓값 $2^{1+2}-1=7$

을 가진다.



답 최댓값: 7, 최솟값: 0

문제 5

정의역이 $\{x\,|\,-1\le x\le 2\}$인 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}+3$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

02 로그함수와 그 그래프

- 로그함수의 뜻을 안다.
- 로그함수의 그래프를 그려 보고, 그 성질을 이해한다.

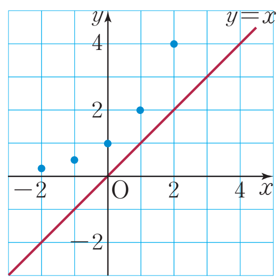
로그함수란 무엇인가?

생각 열기

탐구 활동

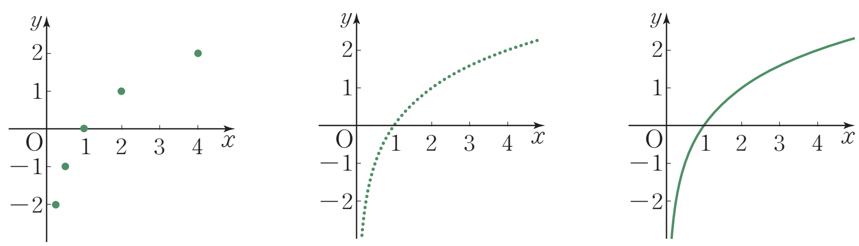
다음은 지수함수 $y=2^x$을 만족시키는 x, y의 값을 나타내는 표이다. 물음에 답하여 보자.

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4



1. 순서쌍 $(x,\ y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 오른쪽 좌표평면 위에 각각 나타내어 보자.
2. 1에서 나타낸 점을 매끄러운 곡선으로 연결하여 보자.

지수함수 $y=2^x$의 그래프 위의 점 $(a,\ b)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 $(b,\ a)$는 지수함수 $y=2^x$의 역함수의 그래프 위의 점이다. 이 점을 좌표평면 위에 나타내고 매끄러운 곡선으로 연결하면 다음과 같다.



위의 그래프에서 지수함수 $y=2^x$의 역함수의 그래프는 정의역이 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합임을 알 수 있다.

일반적으로 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.

이제 지수함수의 역함수가 어떤 함수인지 알아보자.

로그의 정의에 의하여

$$y=a^x \iff x=\log_a y\ (a>0,\ a\neq1)$$

이므로 $x=\log_a y$에서 x와 y를 바꾸면 지수함수 $y=a^x$의 역함수

$$y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq1)$$

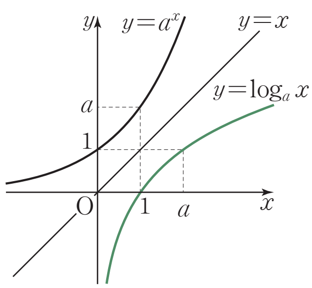
를 얻는다. 이 함수 $y=\log_a x$를 a를 밑으로 하는 **로그함수**라고 한다.

로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프는 그 역함수인 지수함수 $y=a^x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

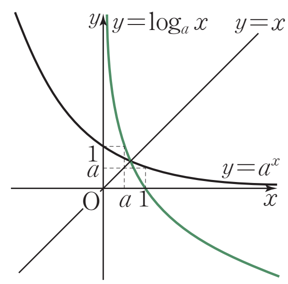
따라서 $y=\log_a x$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프를 이용하여 다음과 같이 그릴 수 있다.

$y=a^x$의 그래프는 x축이 점근선이므로 $y=\log_a x$의 그래프는 y축이 점근선이다.

$a>1$



$0<a<1$



이상을 정리하면 다음과 같다.

> **로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 성질**
>
> (1) 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.
>
> (2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
>
> $0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
>
> (3) 그래프는 점 $(1,\ 0)$을 지나고, y축을 점근선으로 한다.

문제 1 지수함수 $y=3^x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 이용하여 다음 로그함수의 그래프를 그려라.

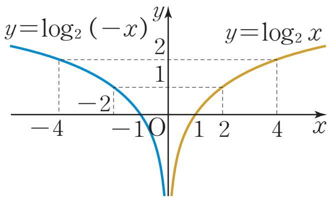
(1) $y=\log_3 x$

(2) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$

예제 01 로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 이용하여 다음 함수의 그래프를 그려라.

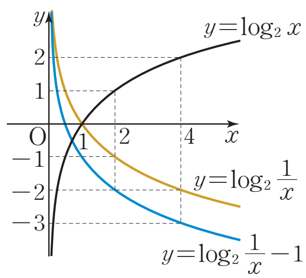
(1) $y=\log_2(-x)$ (2) $y=\log_2 \dfrac{1}{x}-1$

풀이 (1) $y=\log_2(-x)$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.
따라서 함수 $y=\log_2(-x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $\log_2 \dfrac{1}{x}=-\log_2 x$이므로 $y=\log_2 \dfrac{1}{x}-1$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 다음 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 함수 $y=\log_2 \dfrac{1}{x}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$y=-f(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.



문제 2 다음 함수의 그래프를 그려라.

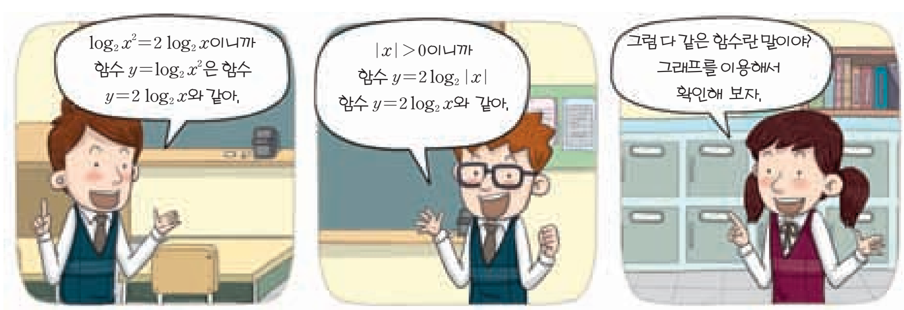
(1) $y=\log_2 2x$ (2) $y=-\log_{\frac{1}{2}} x$

(3) $y=-\log_3 x+1$ (4) $y=\log_3(x+3)-2$

사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

세 함수 $y=\log_2 x^2$, $y=2\log_2 x$, $y=2\log_2|x|$에 대한 대화를 보고, 세 함수가 서로 같은 함수인지 토의하여 보자.



예제 02

다음 두 수의 크기를 비교하여라.

(1) $\log_3 7$, $\dfrac{1}{2}\log_3 16$ (2) $2\log_{\frac{1}{2}} 3$, $\dfrac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27$

풀이 (1) $\dfrac{1}{2}\log_3 16=\log_3 16^{\frac{1}{2}}=\log_3 4$

함수 $y=\log_3 x$의 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 $7>4$에서 $\log_3 7>\log_3 4$이므로 $\log_3 7>\dfrac{1}{2}\log_3 16$이다.

(2) $2\log_{\frac{1}{2}} 3=\log_{\frac{1}{2}} 3^2=\log_{\frac{1}{2}} 9$, $\dfrac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27=\log_{\frac{1}{2}} 27^{\frac{1}{3}}=\log_{\frac{1}{2}} 3$

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 $9>3$에서 $\log_{\frac{1}{2}} 9<\log_{\frac{1}{2}} 3$이므로 $2\log_{\frac{1}{2}} 3<\dfrac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27$이다.

답 (1) $\log_3 7>\dfrac{1}{2}\log_3 16$ (2) $2\log_{\frac{1}{2}} 3<\dfrac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27$

문제 3

다음 두 수의 크기를 비교하여라.

(1) $3\log_2 5$, $2\log_2 7$ (2) $\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 7$, $\dfrac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}} 64$

예제 03

정의역이 $\{x\,|\,2\le x\le 5\}$인 함수 $y=\log_2(x-1)+2$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

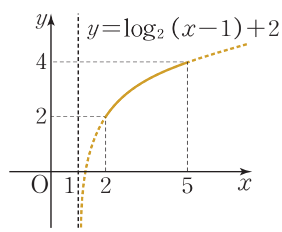
풀이 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\log_2(x-1)+2$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 함수 $y=\log_2(x-1)+2$는

$x=2$일 때 최솟값 $\log_2 1+2=2$,

$x=5$일 때 최댓값 $\log_2 4+2=4$

를 가진다.



답 최댓값: 4, 최솟값: 2

문제 4

정의역이 $\{x\,|\,1\le x\le 9\}$인 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x-2$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

03 지수함수와 로그함수의 활용

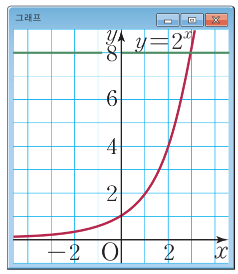
● 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

지수함수는 어떻게 활용되는가?

생각 열기

탐구 활동

오른쪽 그림은 두 함수 $y=2^x$, $y=8$의 그래프를 컴퓨터를 이용하여 나타낸 것이다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 함수 $y=2^x$의 그래프와 직선 $y=8$의 교점의 개수를 구하여 보자.
2. $2^x=8$을 만족시키는 x의 값을 구하여 보자.

● 지수함수 $y=a^x$ $(a>0, a\neq1)$은 정의역이 실수 전체의 집합이고, 치역이 양의 실수 전체의 집합인 일대일 대응이다.

일반적으로 $a^x=b\,(a>0,\ a\neq1)$꼴의 등식을 만족시키는 x의 값을 구할 때에는 b를 a^k (k는 상수)꼴로 고치고, 다음 성질을 이용한다.

$$a^x=a^k \iff x=k$$

문제 1 어느 펀드 상품에 A원을 투자할 때 t년 후의 이익금은 $A\times\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$원이 된다고 한다. 처음 투자 금액이 80만 원이고 t년 후의 이익금이 270만 원일 때, t의 값을 구하여라.

일반적으로 $a^x<b$ 꼴의 부등식을 만족시키는 x값의 범위를 구할 때에는 b를 a^k 꼴로 고치고, 다음 성질을 이용한다.

[1] $a>1$일 때, $\quad a^x<a^k \iff x<k$

[2] $0<a<1$일 때, $\quad a^x<a^k \iff x>k$

예제 01 유리에 어떤 필름을 한 장 붙이면 들어오는 빛의 양의 20 %를 반사시킨다고 한다. 유리를 통과한 빛의 양이 처음 들어오는 양의 $\frac{64}{125}$ 이하가 되도록 하려면 이 필름을 최소한 몇 장 붙여야 하는지 구하여라.

풀이 필름을 한 장 붙이면 들어오는 빛의 양의 80 %가 통과한다.
들어오는 빛의 양을 a라 하고, 필름을 x장 붙일 때 통과하는 빛의 양이 들어오는 양의 $\frac{64}{125}$ 이하라고 하면

$a\times\left(\frac{80}{100}\right)^x\le\frac{64}{125}a$에서 $\left(\frac{4}{5}\right)^x\le\left(\frac{4}{5}\right)^3$이므로 $x\ge3$

따라서 필름을 최소한 3장 붙여야 한다.

답 3장

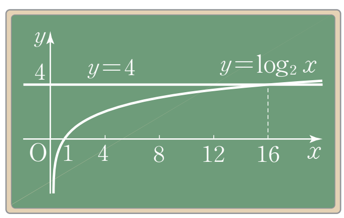
문제 2 어떤 방향제는 개봉한 지 t시간 후에 처음 양의 $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^t$만큼 기화되어 향기를 낸다. 방향제가 기화되는 양이 처음 양의 $\frac{1}{128}$보다 적으면 기화되어도 더 이상 사람이 향기를 느끼지 못한다고 할 때, 이 방향제의 향기가 지속되는 시간을 구하여라.

로그함수는 어떻게 활용되는가?

생각 열기

탐구 활동

함수 $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=4$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 물음에 답하여 보자.



1. 함수 $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=4$의 교점의 개수를 구하여 보자.

2. $\log_2 x=4$를 만족시키는 x의 값을 구하여 보자.

일반적으로 $\log_a x=b$ 꼴의 등식을 만족시키는 x의 값을 구할 때에는 로그의 정의를 이용하거나, b를 $\log_a k$ 꼴로 고치고 다음 성질을 이용한다.

$a>0$, $a\neq1$이고 $x>0$, $k>0$일 때

[1] $\log_a x=b \iff x=a^b$

[2] $\log_a x=\log_a k \iff x=k$

로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq1)$는 정의역이 양의 실수 전체의 집합이고, 치역이 실수 전체의 집합인 일대일 대응이다.

예제 02 소리의 강도 A(dB)와 소리의 크기 I($\mathrm{W/m^2}$) 사이에는

$$A=10\log\frac{I}{I_0}$$

인 관계가 있다. 여기서 $I_0=10^{-12}$($\mathrm{W/m^2}$)으로 사람이 겨우 들을 수 있는 조그마한 소리의 크기를 나타낸다. 사람이 대화를 나누는 소리의 강도가 60 dB일 때, 대화를 나누는 소리의 크기를 구하여라.

풀이 대화를 나누는 소리의 크기를 x($\mathrm{W/m^2}$)로 놓으면

$60=10\log\dfrac{x}{10^{-12}}=10(\log x-\log10^{-12})$, $6=\log x+12$

즉, $\log x=-6$이므로 $x=10^{-6}$($\mathrm{W/m^2}$)

따라서 대화를 나누는 소리의 크기는 $10^{-6}\ \mathrm{W/m^2}$이다.

답 $10^{-6}\ \mathrm{W/m^2}$

문제 3 해저에서 발생한 지진이 지진 해일을 일으킬 때, 높이가 H m인 지진 해일의 규모 M은

$$M=\log_8 H$$

와 같다고 한다. 높이가 x m인 지진 해일의 규모는 높이가 6 m인 지진 해일의 규모의 2배일 때, x의 값을 구하여라.

일반적으로 $\log_a x<b$ 꼴의 부등식을 만족시키는 x값의 범위를 구할 때에는 b를 $\log_a k$ 꼴로 고치고 다음 성질을 이용한다.

$x>0$, $k>0$에 대하여

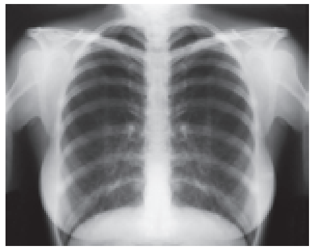
[1] $a>1$일 때, $\log_a x<\log_a k \iff x<k$

[2] $0<a<1$일 때, $\log_a x<\log_a k \iff x>k$

로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq1)$는 $a>1$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고, $0<a<1$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

예제 **03**

X선 사진에서 사진 농도는 사진에 나타난 상의 검은 정도를 표시하는 양이고, 투과도는 처음 쏘인 빛의 양에 대한 투과된 빛의 양의 비율이다. 사진 농도를 D, 투과도를 T라고 할 때, $D=-\log T$의 식이 성립한다. 사진 농도가 $\frac{1}{2}$ 이상인 부분에 투과된 빛의 양은 처음 쏘인 빛의 양의 최대 몇 배인지 구하여라.



풀이 투과도를 x, 처음 쏘인 빛의 양을 I_0, 투과된 빛의 양을 I라고 하면 $\frac{I}{I_0}=x\ (x>0)$

이때 사진 농도가 $\frac{1}{2}$ 이상이므로 $-\log x \geq \frac{1}{2}$, $\log x \leq \log 10^{-\frac{1}{2}}$, $0<x\leq 10^{-\frac{1}{2}}$

따라서 투과된 빛의 양은 처음 쏘인 빛의 양의 최대 $10^{-\frac{1}{2}}$배, 즉 $\frac{\sqrt{10}}{10}$배이다.

답 $\frac{\sqrt{10}}{10}$배

문제 4 정부는 올해 소비자 물가 상승률이 $5\,\%$ 이하가 되도록 관리하려고 한다. 각 분기마다 같은 비율로 상승한다고 할 때, 분기별 소비자 물가 상승률이 몇 $\%$ 이하가 되면 정부의 목표가 달성되는지 구하여라. (단, $\log 1.05=0.0212$, $\log 1.012=0.0053$으로 계산한다.)

발전

문제 5 어떤 도시에서 슈퍼 와이파이 망 구축의 적합도를 검증하기 위하여 통신 신호 세기를 측정하였다. 기지국에서 1 km 멀어질 때마다 신호의 세기는 1 km 전의 세기의 $90\,\%$가 된다고 하자. 신호의 세기가 $\frac{1}{3}$ 이하가 되는 곳에 중계기를 설치해야 한다고 할 때, 기지국에서 중계기까지의 거리는 최소 몇 km인지 구하여라. (단, $\log 3=0.48$로 계산한다.)

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

어떤 용액에 녹아 있는 수소 이온의 활동도를 a_{H}라고 할 때, 이 용액의 산성도를 나타내는 pH는

$$\mathrm{pH}=-\log a_{\mathrm{H}}$$

로 정의한다. pH가 5.6 이하인 비를 산성비라고 할 때, 산성비에 녹아 있는 수소 이온의 최소 활동도를 구하여라. (단, 수소 이온의 활동도 a_{H}는 용액 1 L 속에 녹아 있는 수소 이온 농도 $[\mathrm{H}^+](\mathrm{mol/L})$와 같다고 생각한다.)

중단원 기초

1 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 찾아라.

ㄱ. 제1, 2사분면을 지난다.
ㄴ. x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
ㄷ. 점 $(0,\ 1)$을 지난다.
ㄹ. 점근선은 y축이다.

01 지수함수와 그 그래프
지수함수의 성질

2 다음 함수의 그래프 중에서 함수 $y=2^x$의 그래프를 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 것을 모두 찾아라.

㉠ $y=\frac{2^x}{4}$　　㉡ $y=\sqrt{2}\cdot 2^x$
㉢ $y=2^{3x}$　　㉣ $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

01 지수함수와 그 그래프
지수함수의 평행이동

3 함수 $y=\log_{0.1}x$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 찾아라.

ㄱ. x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
ㄴ. 점 $(0,\ 1)$을 지난다.
ㄷ. 점근선의 방정식은 $x=0$이다.
ㄹ. 함수 $y=\frac{1}{10^x}$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

02 로그함수와 그 그래프
로그함수의 성질

4 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) 정의역이 $\{x|2\le x\le 26\}$인 함수 $y=\log_3(x+1)$
(2) 정의역이 $\{x|-1\le x\le 6\}$인 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)+3$

02 로그함수와 그 그래프
로그함수의 최댓값과 최솟값

5 유산균 음료에 들어가는 유산균을 배양하려고 한다. 처음 유산균의 수가 2000마리일 때, t분 후의 유산균의 수 $N(t)$는

$$N(t)=2000\cdot 2^{\frac{t}{15}}$$

이라고 한다. 유산균의 수가 16000마리가 되는 것은 몇 분 후인지 구하여라.

03 로그함수와 지수함수의 활용
지수함수의 활용

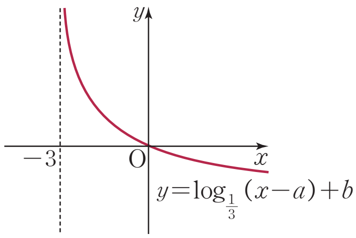
1 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+k$의 그래프가 제1사분면을 지나지 않도록 하는 정수 k의 최댓값을 구하여라.

01 지수함수와 그 그래프

2 함수 $y=2^{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하였더니 함수 $y=16\cdot 2^{2x}+4$의 그래프와 겹쳐졌다. 이때 $m+n$의 값을 구하여라.

01 지수함수와 그 그래프
지수함수의 평행이동

3 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-a)+b$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $a+b$의 값을 구하여라.



02 로그함수와 그 그래프

4 두 함수 $y=f(x)$와 $y=\log_2(x+a)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 점 $\mathrm{P}(1,\ 5)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

02 로그함수와 그 그래프
로그함수와 역함수

5 어떤 호수의 수면에서 빛의 세기가 I_0일 때, 수심 d m인 곳에서 빛의 세기 I는

$$I=I_0\times 2^{-\frac{1}{4}d}$$

이라고 한다. 빛의 세기가 수면에서 빛의 세기의 $\frac{1}{4}$이 되는 곳의 수심을 구하여라.

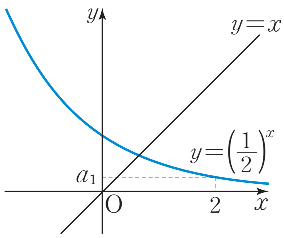
03 로그함수와 지수함수의 활용
지수함수의 활용

중단원 실력

1 오른쪽 그림과 같은 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$에 대하여

$$a_1=f(2),\ a_{n+1}=f(a_n)\ (n=1,\ 2,\ 3)$$

일 때, a_2, a_3, a_4의 대소 관계를 나타내어라.



01 지수함수와 그 그래프
대소 관계

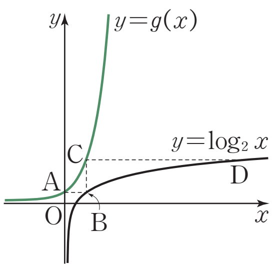
2 정의역이 $\{x\,|\,-1\le x\le 2\}$인 함수 $y=4^x-2^{x+1}+4$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

01 지수함수와 그 그래프
지수함수의 최댓값과 최솟값

3 두 곡선 $y=\log_3 3x$, $y=\log_3 \frac{x}{3}$와 두 직선 $x=1$, $x=9$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

02 로그함수와 그 그래프
로그함수의 평행이동

4 함수 $y=\log_2 x$의 역함수를 $y=g(x)$라고 할 때, 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 두 점 B, D와 곡선 $y=g(x)$ 위의 두 점 A, C가 있다. 점 A의 좌표가 $(0,\ 1)$일 때, $\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$의 값을 구하여라. (단, 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)



02 로그함수와 그 그래프
로그함수와 역함수

5 어느 하천의 수질은 현재 4급수로서 생화학적 산소 요구량(BOD)이 8이라고 한다. 이 지역 주민들의 적극적인 수질 개선으로 BOD가 매년 20 %씩 감소한다고 할 때, 이 하천의 수질이 1급수로서 BOD가 1 이하가 되는 것은 몇 년 후인지 구하여라. (단, $\log 2=0.3$으로 계산한다.)

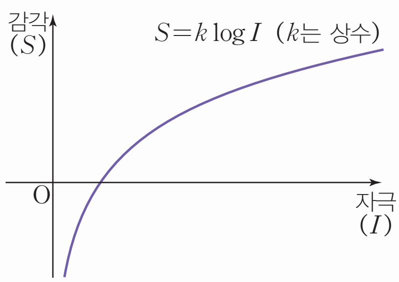
03 로그함수와 지수함수의 활용
로그함수의 활용

2 지수함수와 로그함수의 미분

로그함수를 이용하여 사람이 느끼는 감각의 크기를 알 수 있다.

조용한 밤에는 시계 초침의 작은 소리도 귀에 또렷이 들린다. 그런데 시끄러운 공연장에서는 크게 소리를 질러야 겨우 옆 사람과 대화를 할 수 있다. 즉, 작은 소리는 그 크기가 조금만 변해도 그 변화를 쉽게 알 수 있지만, 큰 소리는 조금 변하여도 잘 느낄 수 없다.

이는 로그함수로 나타나는 베버-페히너의 법칙(Weber-Fechner's Law)을 이용하면 쉽게 이해할 수 있다. 오른쪽 그림과 같이 소리가 작을 때에는 그래프의 기울기가 급격하므로 소리의 크기가 조금만 변해도 감각의 변화가 커서 더욱 민감하게 느낄 수 있지만, 소리가 클 때에는 그래프의 기울기가 완만하므로 웬만큼 그 크기가 변해도 잘 느낄 수 없다.



베버-페히너의 법칙
(Weber-Fechner's Law)

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 38쪽

자극의 크기에 따라 우리 감각의 민감함을 설명할 수 있을까?

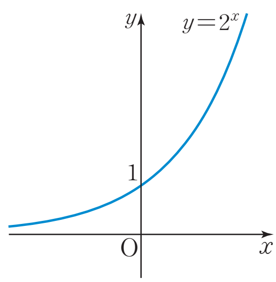
01 지수함수와 로그함수의 극한

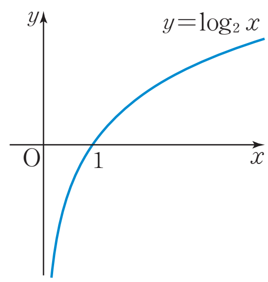
● 지수함수와 로그함수의 극한값을 구할 수 있다.

지수함수와 로그함수의 극한값은 어떻게 구하는가?

생각 열기

탐구 활동 **두 함수 $y=2^x$과 $y=\log_2 x$의 그래프를 이용하여 다음 물음에 답하여 보자.**





1. x의 값이 한없이 커질 때와 한없이 작아질 때, 2^x의 값은 어떻게 변하는지 각각 말하여 보자.

2. x의 값이 한없이 커질 때와 양수이면서 0에 한없이 가까워질 때, $\log_2 x$의 값은 어떻게 변하는지 각각 말하여 보자.

탐구 활동에서 x의 값이 한없이 커지면 2^x의 값은 한없이 커지고, x의 값이 한없이 작아지면 2^x의 값은 0에 한없이 가까워진다.

즉, $\lim_{x\to\infty} 2^x=\infty$이고, $\lim_{x\to-\infty} 2^x=0$이다.

또 x의 값이 한없이 커지면 $\log_2 x$의 값은 한없이 커지고, x의 값이 양수이면서 0에 한없이 가까워지면 $\log_2 x$의 값은 음수이면서 절댓값이 한없이 커진다.

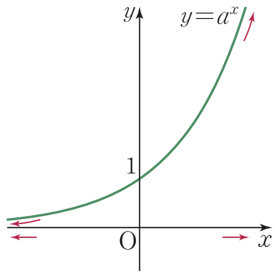
즉, $\lim_{x\to\infty} \log_2 x=\infty$이고, $\lim_{x\to0+} \log_2 x=-\infty$이다.

이와 같이 간단한 지수함수와 로그함수의 극한은 그래프를 이용하여 알 수 있다.

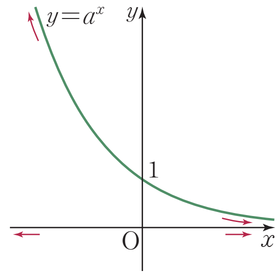
지수함수의 극한에 대하여 알아보자.

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 극한은 그래프를 이용하면 쉽게 알 수 있다.

$a>1$



$0<a<1$



위의 그래프에서 알 수 있듯이 $x \to \infty$ 또는 $x \to -\infty$일 때, 지수함수 $y=a^x$의 극한은 다음과 같다.

[1] $a>1$일 때, $\quad \lim\limits_{x\to\infty} a^x=\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$

[2] $0<a<1$일 때, $\quad \lim\limits_{x\to\infty} a^x=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty} a^x=\infty$

문제 1 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} 3^x$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{5^x}$

예제 01 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x}{1-2^x}$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3^x-2^x}{3^x+2^x}$

풀이 (1) 분자, 분모를 2^x으로 나누면

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{1-2^x}=\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^x-1}=\frac{1}{0-1}=-1$$

(2) 분자, 분모를 3^x으로 나누면

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}=\lim_{x\to\infty} \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

답 (1) -1 (2) 1

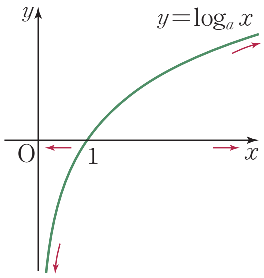
문제 2 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x}{3^x+1}$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}$

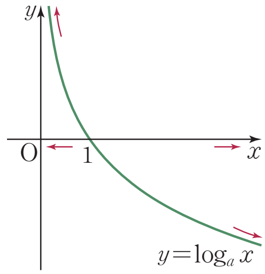
로그함수의 극한에 대하여 알아보자.

로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 극한은 그래프를 이용하면 쉽게 알 수 있다.

$a>1$



$0<a<1$



위의 그래프에서 알 수 있듯이 $x \rightarrow \infty$ 또는 $x \rightarrow 0+$일 때, 로그함수 $y=\log_a x$의 극한은 다음과 같다.

[1] $a>1$일 때, $\lim\limits_{x\to0+} \log_a x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x=\infty$

[2] $0<a<1$일 때, $\lim\limits_{x\to0+} \log_a x=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x=-\infty$

문제 3 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \log_2 x$ (2) $\lim\limits_{x\to0+} \log_{\frac{1}{2}} x$

예제 02 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \log_2 \dfrac{4x+1}{x}$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty} \{\log_3 (x+2)-\log_3 x\}$

풀이 (1) $\lim\limits_{x\to\infty} \log_2 \dfrac{4x+1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty} \log_2 \left(4+\dfrac{1}{x}\right)=\log_2 4=2$

(2) 로그의 성질에 의하여

$$\lim_{x\to\infty} \{\log_3 (x+2)-\log_3 x\}=\lim_{x\to\infty} \log_3 \frac{x+2}{x}=\lim_{x\to\infty} \log_3 \left(1+\frac{2}{x}\right)=\log_3 1=0$$

답 (1) 2 (2) 0

문제 4 다음 극한값을 구하여라.

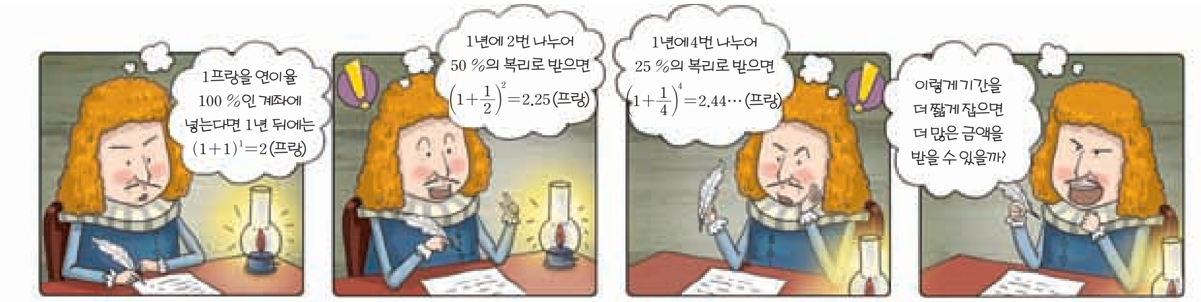
(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \log_3 \dfrac{1+x}{x}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \{\log_2 (4x+1)+\log_{\frac{1}{2}} 2x\}$

(3) $\lim\limits_{x\to1} \{\log_3 |x^3-1|-\log_3 |x-1|\}$

무리수 e는 무엇인가?

생각 열기 베르누이(Bernoulli, J.; 1654~1705)는 복리 문제를 연구하던 중 다음과 같은 의문을 가졌다.



탐구 활동 **원금이 A원이고, $\frac{1}{n}$년마다 이자율이 $\frac{1}{n}$인 복리로 계산하는 예금에 들었을 때, 1년 후의 원리합계 S는 다음과 같다.**

$$S=A\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

물음에 답하여 보자.

1. 오른쪽 표를 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값을 추측하여 보자.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
10	2.59374⋯
100	2.70481⋯
1000	2.71692⋯
10000	2.71814⋯
100000	2.71826⋯
1000000	2.71828⋯

탐구 활동에서 자연수 n의 값이 한없이 커지면 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값은 일정한 수에 가까워짐을 추측할 수 있다.

실제로 n의 값이 한없이 커지면 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값은 일정한 수에 수렴한다고 알려져 있다.

즉, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값은 존재하며 그 극한값을 문자

$$e$$

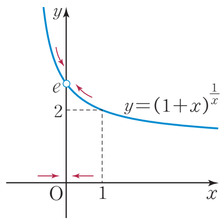
로 나타낸다.

이때 수 e는 무리수이며 그 값은 다음과 같다.

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.718281828459045\cdots$$

오일러의 수 e
스위스의 수학자 오일러(Euler, L.; 1707~1783)는 무리수 e를 처음으로 정의하여 사용하였다.

● $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$의 그래프



한편 $x=\frac{1}{n}$이라고 하면 $n \longrightarrow \infty$일 때 $x \longrightarrow 0$이므로 무리수 e는 다음과 같이 나타낼 수도 있다.

$$e=\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

또 무리수 e를 밑으로 하는 지수함수 e^x도 생각할 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

무리수 e의 정의

(1) $\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ (2) $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

보기 (1) $\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim_{x \to \infty} \left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\}^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

(2) $\lim_{x \to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x \to 0} \{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\}^2$에서

$2x=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 0$일 때, $t \longrightarrow 0$이므로 $\lim_{t \to 0} \{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^2=e^2$

문제 5 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{2x}\right)^{-x}$ (2) $\lim_{x \to -\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x}$

(3) $\lim_{x \to 0} (1+3x)^{\frac{1}{2x}}$ (4) $\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

앞에서 정의한 무리수 e를 밑으로 하는 로그 $\log_e x$를 **자연로그**라 하고, 자연로그 $\log_e x$를 간단히

● $y=e^x$과 $y=\ln x$는 서로 역함수 관계이다.

$$\ln x$$

와 같이 나타낸다. 즉, $\log_e x=\ln x$이다.

보기 (1) $\ln 1=\log_e 1=0$

(2) $\ln e=\log_e e=1$

문제 6 다음 값을 구하여라.

(1) $\ln e^2$ (2) $\ln \frac{1}{\sqrt{e}}$

$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$임을 이용하여 여러 가지 함수의 극한값을 구할 수 있다.

예제 03 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x \to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ (2) $\lim_{x \to 0}\frac{e^x-1}{x}$

풀이 (1) $\lim_{x \to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x \to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x \to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$

(2) $e^x-1=t$로 놓으면 $e^x=1+t$이므로 $x=\ln(1+t)$

또 $x \to 0$일 때 $t \to 0$이므로

$$\lim_{x \to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t \to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\lim_{t \to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}}=\frac{1}{1}=1$$

답 (1) 1 (2) 1

문제 7 다음 극한값을 구하여라. (단, $a>0$, $a \neq 1$)

(1) $\lim_{x \to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$ (2) $\lim_{x \to 0}\frac{a^x-1}{x}$

문제 8 다음 극한값을 구하여라.

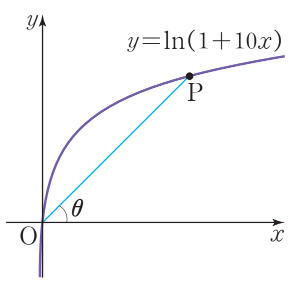
(1) $\lim_{x \to 0}\frac{2^{2x}-1}{x}$ (2) $\lim_{x \to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$

(3) $\lim_{x \to 0}\frac{x}{\log_3(1-2x)}$ (4) $\lim_{x \to \infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}$

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

오른쪽 그림과 같이 제1사분면에서 곡선 $y=\ln(1+10x)$ 위를 움직이는 점 P와 원점 O를 이은 선분이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라고 하자. 점 P가 원점 O에 한없이 가까워질 때, $\tan\theta$를 점 P의 x좌표에 관한 식으로 나타내고, 그 값을 구하여 보자.



02 지수함수와 로그함수의 미분

● 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.

지수함수의 도함수는 무엇인가?

탐구 활동

지수함수 $f(x)=e^x$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. $f(1+\varDelta x)-f(1)$을 구하여 보자.

2. **1**의 결과를 이용하여 $\lim\limits_{\varDelta x \to 0} \dfrac{f(1+\varDelta x)-f(1)}{\varDelta x}$을 구하여 보자.

지수함수의 극한을 이용하여 지수함수의 도함수를 구하여 보자.

지수함수 $y=e^x$에서 x의 증분 $\varDelta x$에 대한 y의 증분을 $\varDelta y$라고 하면

$$\varDelta y=e^{x+\varDelta x}-e^x=e^x(e^{\varDelta x}-1)$$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{e^x(e^{\varDelta x}-1)}{\varDelta x}=e^x\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{e^{\varDelta x}-1}{\varDelta x}=e^x\cdot 1=e^x$$

이다. 따라서 $(e^x)'=e^x$이다.

또한 지수함수 $y=a^x\ (a>0,\ a\neq 1)$에서 x의 증분 $\varDelta x$에 대한 y의 증분을 $\varDelta y$라고 하면

$$\varDelta y=a^{x+\varDelta x}-a^x=a^x(a^{\varDelta x}-1)$$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{a^x(a^{\varDelta x}-1)}{\varDelta x}=a^x\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{a^{\varDelta x}-1}{\varDelta x}=a^x\ln a$$

이다. 따라서 $(a^x)'=a^x\ln a$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

지수함수의 도함수

(1) $y=e^x$이면 $y'=e^x$

(2) $y=a^x\ (a>0,\ a\neq 1)$이면 $y'=a^x\ln a$

보기 (1) $(2e^x)'=2(e^x)'=2e^x$ (2) $(3^x)'=3^x\ln 3$

문제 1 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=-3e^{x}$　　　(2) $y=2\cdot5^{x}$

예제 01 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=e^{x}+3^{2x}$　　　(2) $y=xe^{x}$

풀이 (1) $y'=(e^{x})'+(9^{x})'=e^{x}+9^{x}\ln 9$

(2) 곱의 미분법에 의하여

$$y'=(x)'\cdot e^{x}+x\cdot(e^{x})'=e^{x}+xe^{x}=e^{x}(1+x)$$

답 (1) $y'=e^{x}+9^{x}\ln 9$　(2) $y'=e^{x}(1+x)$

문제 2 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=(1+3^{x})^{2}$　　　(2) $y=(2e)^{x}$

문제 3 함수 $f(x)=3^{x}$에 대하여 다음 값을 구하여라.

(1) $f'(0)$　　　(2) $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

창의 up

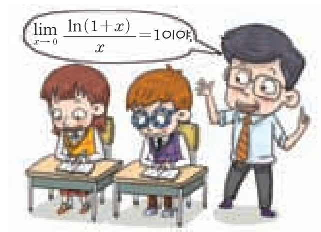
두 상수 a, b에 대하여 지수함수 $f(x)=a^{bx}$의 도함수를 구하는 방법을 설명하여라.

(단, $a>0$, $a\neq1$, $b\neq0$)

로그함수의 도함수는 무엇인가?

탐구 활동

로그함수 $f(x)=\ln x$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.



1. $f(1+\Delta x)-f(1)$을 구하여 보자.

2. **1**의 결과를 이용하여 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$을 구하여 보자.

로그함수의 극한을 이용하여 로그함수의 도함수를 구하여 보자.

로그함수 $y=\ln x$에서 x의 증분 Δx에 대한 y의 증분을 Δy라고 하면

$$\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x=\ln\frac{x+\Delta x}{x}=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

이다. 여기서 $\frac{\Delta x}{x}=h$로 놓으면 $\Delta x \to 0$일 때 $h \to 0$이므로

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{xh}=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{h}\ln(1+h)\right\}\\&=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\{\ln(1+h)^{\frac{1}{h}}\}=\frac{1}{x}\ln\{\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\}\\&=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}\end{aligned}$$

이다. 따라서 $(\ln x)'=\frac{1}{x}$이다.

한편 $a>0$, $a\neq 1$일 때, $y=\log_a x$에서 $\log_a x=\frac{\log_e x}{\log_e a}=\frac{\ln x}{\ln a}$이므로

$$(\log_a x)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{(\ln x)'}{\ln a}=\frac{1}{x\ln a}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

로그함수의 도함수

(1) $y=\ln x$ $(x>0)$이면 $y'=\frac{1}{x}$

(2) $y=\log_a x$ $(x>0,\ a>0,\ a\neq 1)$이면 $y'=\frac{1}{x\ln a}$

보기 (1) $x>0$일 때, $(2\ln x)'=2(\ln x)'=\frac{2}{x}$ (2) $x>0$일 때, $(\log_3 x)'=\frac{1}{x\ln 3}$

문제 4 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=\ln x^3$　　(2) $y=\log_2 2x$

예제 02 다음 함수의 도함수를 구하여라. (단, $x>0$)

(1) $y=\ln x+\log_{\sqrt{2}} x$　　(2) $y=x \ln x$

풀이 (1) $y'=(\ln x)'+(\log_{\sqrt{2}} x)'=\frac{1}{x}+\frac{1}{x \ln \sqrt{2}}=\frac{1}{x}+\frac{2}{x \ln 2}=\frac{1}{x}\left(1+\frac{2}{\ln 2}\right)$

(2) 곱의 미분법에 의하여

$$y'=(x)'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'=\ln x+x\cdot\left(\frac{1}{x}\right)=\ln x+1$$

답 (1) $y'=\frac{1}{x}\left(1+\frac{2}{\ln 2}\right)$　(2) $y'=\ln x+1$

문제 5 다음 함수의 도함수를 구하여라. (단, $x>0$)

(1) $y=2\ln x-x$　　(2) $y=x^2 \log_3 x$

문제 6 곡선 $y=x+\ln x$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기를 구하여라.

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

$x>0$일 때, 평균값 정리를 이용하여 다음 부등식이 성립함을 설명하여 보자.

$$\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$$

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

외부 자극의 세기를 x, 사람이 느끼는 감각의 세기를 $f(x)$라고 할 때,

$$f(x)=k\log x \ (k\text{는 상수})$$

가 성립한다고 하자.

로그함수의 도함수를 이용하여 다음 물음에 답하여라.

(1) $k=\frac{1}{7}$일 때, $f'(1)$과 $f'(10)$의 값을 구하여라.

(2) (1)에서 구한 값을 비교하여 그 의미를 설명하여라.

[해답 p. 199]

중단원 기초

수준별 학습

1 다음 극한을 조사하고, 극한이 존재하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{3^x}{2^{2x}}$ (2) $\lim_{x\to\infty}\frac{3^x}{1-3^x}$

(3) $\lim_{x\to\infty}(3^x-2^x)$ (4) $\lim_{x\to\infty}\frac{5^x-5^{-x}}{5^x+5^{-x}}$

01 지수함수와 로그함수의 극한
지수함수의 극한

2 다음 극한을 조사하고, 극한이 존재하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to0+}\log_2 2x$ (2) $\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{3x+1}{x}$

(3) $\lim_{x\to1+}\{\log_2(x^2-1)-\log_2(x-1)\}$ (4) $\lim_{x\to3+}\log_{\frac{1}{2}}(x-3)$

01 지수함수와 로그함수의 극한
로그함수의 극한

3 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ (2) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{2x}$ (3) $\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{2x}$

(4) $\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$ (5) $\lim_{x\to0}\frac{\log_2(1-2x)}{x}$ (6) $\lim_{x\to0}\frac{x}{3^x-1}$

01 지수함수와 로그함수의 극한
무리수 e의 정의

4 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=(3e)^x$ (2) $y=(x^2+1)e^x$

(3) $y=3\cdot2^x$ (4) $y=4x\cdot3^x$

02 지수함수와 로그함수의 미분
지수함수의 미분

5 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\ln\frac{1}{x}$ (2) $y=x\ln 3x$

(3) $y=2\log x-x$ (4) $y=\log_2 5x$

02 지수함수와 로그함수의 미분
로그함수의 미분

[해답 p. 199]

중단원 기본

수준별 학습

1 $\lim_{x\to\infty}\frac{a\cdot3^{x+1}-4}{3^{x-1}+2^x}=18$을 만족시키는 상수 a의 값을 구하여라.

01 지수함수와 로그함수의 극한
지수함수의 극한

2 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log_3(6^x+9^x)$의 값을 구하여라.

01 지수함수와 로그함수의 극한
로그함수의 극한

3 $\lim_{x\to0}\frac{e^{ax+b}-1}{\ln(1+cx)}=3$을 만족시키는 상수 a, b, c에 대하여 $\frac{a+b}{c}$의 값을 구하여라.

01 지수함수와 로그함수의 극한

4 곡선 $y=2x+e^x$에 접하고, 직선 $y=3x-1$에 평행한 직선의 방정식을 구하여라.

02 지수함수와 로그함수의 미분
지수함수의 도함수

5 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)=x\ln x$일 때, $\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}$의 값을 구하여라.

02 지수함수와 로그함수의 미분
로그함수의 도함수

[해답 p.199]

중단원 실력

수준별 학습

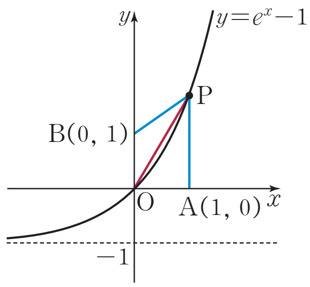
1 다음 중에서 극한값이 존재하는 것을 모두 찾아라.

01 지수함수와 로그함수의 극한

ㄱ $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1-3^{\frac{1}{x}}}$ ㄴ $\lim_{x\to0}\dfrac{1-5^{\frac{1}{x}}}{1+5^{\frac{1}{x}}}$

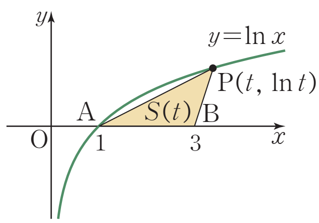
ㄷ $\lim_{x\to\infty}\log_2\dfrac{2x^2+3x}{x^2-2}$ ㄹ $\lim_{x\to1}x^{\frac{2}{1-x}}$

2 곡선 $y=e^x-1$ 위의 임의의 점 P에서 세 점 O$(0,\ 0)$, A$(1,\ 0)$, B$(0,\ 1)$에 선분을 그을 때 만들어지는 두 삼각형 OAP와 OBP의 넓이를 각각 S_{A}, S_{B}라고 하자. 점 P가 이 곡선을 따라 점 O에 한없이 가까워질 때, $\dfrac{S_{\text{A}}}{S_{\text{B}}}$의 극한값을 구하여라.



01 지수함수와 로그함수의 극한

3 곡선 $y=\ln x$ 위를 움직이는 점 P$(t,\ \ln t)$와 두 점 A$(1,\ 0)$, B$(3,\ 0)$에 대하여 삼각형 PAB의 넓이를 $S(t)$라고 할 때, $\lim_{t\to1+}\dfrac{S(t)}{t-1}$의 값을 구하여라.



01 지수함수와 로그함수의 극한

4 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이고 $(x-1)f(x)=e^{2x-2}-1$을 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하여라.

02 지수함수와 로그함수의 미분

지수함수의 미분

5 함수 $f(x)=\begin{cases}ax^2+1 & (x\le1)\\ \ln bx & (x>1)\end{cases}$가 $x=1$에서 미분가능할 때 상수 a, b의 값을 구하여라.

02 지수함수와 로그함수의 미분

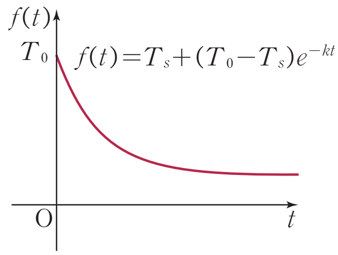
로그함수의 미분

지수함수와 뉴턴의 냉각 법칙

뜨거운 음료나 국의 온도는 시간에 비례하여 일정하게 낮아지지 않고, 처음에는 빠르게 식다가 어느 정도 시간이 지나 주변 온도에 가까워지면 미지근한 상태에서 상대적으로 오랫동안 유지된다. 뉴턴(Newton, I. ; 1642~1727)은 물체의 온도 변화가 시간에 대한 지수함수의 형태로 변하게 됨을 알아내었는데, 이를 뉴턴의 냉각 법칙이라고 한다.

뉴턴의 냉각 법칙에 의하면 어떤 물체의 처음 온도를 T_0 ℃, 주위의 온도를 T_S ℃라고 할 때, 식기 시작한 지 t분 지난 후의 온도 $f(t)$ ℃는 다음과 같다.

$$f(t)=T_S+(T_0-T_S)e^{-kt} \text{ (단, } k\text{는 상수)}$$



이를 이용하면 뜨거운 음료가 언제쯤 몇 ℃까지 식는지 알 수 있다. 또 법의학에서는 사체의 온도 변화를 측정하여 사망 시각을 추정하는 데 뉴턴의 냉각 법칙을 활용하기도 한다.

실내 온도가 20 ℃인 방 안에서 100 ℃의 뜨거운 음료가 10분 후에 60 ℃가 되었다고 할 때, 뉴턴의 냉각 법칙을 이용하여 다음 물음에 답하여 보자.

| 과 제 | **1** 상수 k의 값을 구하여 보자.

| 과 제 | **2** 이 음료의 20분 후의 온도를 구하여 보자.

| 과 제 | **3** 극한값 $\lim_{t\to\infty} f(t)$를 구하여 보자.

대단원 학습 내용 정리

1 지수함수와 그 그래프

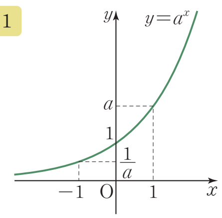
지수함수

a가 1이 아닌 양수일 때,
$y=a^x$을 a를 밑으로 하는 지수함수라고 한다.

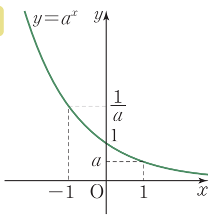
지수함수 $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq1$)의 성질

(1) 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.
(2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
(3) 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나고, x축을 점근선으로 한다.

$a>1$



$0<a<1$



2 로그함수와 그 그래프

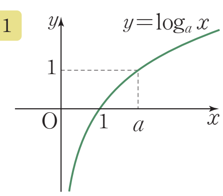
로그함수

a가 1이 아닌 양수일 때,
$y=\log_a x$를 a를 밑으로 하는 로그함수라고 한다.

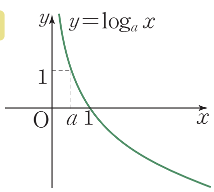
로그함수 $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq1$)의 성질

(1) 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.
(2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
(3) 그래프는 점 $(1,\ 0)$을 지나고, y축을 점근선으로 한다.

$a>1$



$0<a<1$



3 지수함수와 로그함수의 활용

(1) $a>0$, $a\neq1$일 때
$a^x=a^k \iff x=k$
$\log_a x=\log_a k \iff x=k\ (x>0,\ k>0)$
(2) $a>1$일 때
$a^x<a^k \iff x<k$
$\log_a x<\log_a k \iff x<k\ (x>0,\ k>0)$
$0<a<1$일 때
$a^x<a^k \iff x>k$
$\log_a x<\log_a k \iff x>k\ (x>0,\ k>0)$

4 지수함수와 로그함수의 극한

(1) $a>1$일 때
① $\lim_{x\to\infty} a^x=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} a^x=0$
② $\lim_{x\to\infty} \log_a x=\infty$, $\lim_{x\to0+} \log_a x=-\infty$
(2) $0<a<1$일 때
① $\lim_{x\to\infty} a^x=0$, $\lim_{x\to-\infty} a^x=\infty$
② $\lim_{x\to\infty} \log_a x=-\infty$, $\lim_{x\to0+} \log_a x=\infty$

5 무리수 e와 자연로그

(1) $e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=2.7182\cdots$
(2) 자연로그: $\ln x=\log_e x$

6 지수함수와 로그함수의 도함수

지수함수의 도함수

(1) $(e^x)'=e^x$
(2) $(a^x)'=a^x\ln a\ (a>0,\ a\neq1)$

로그함수의 도함수

(1) $(\ln x)'=\frac{1}{x}\ (x>0)$
(2) $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}\ (x>0,\ a>0,\ a\neq1)$

용어와 기호 지수함수, 로그함수, 자연로그, e, e^x, $\ln x$

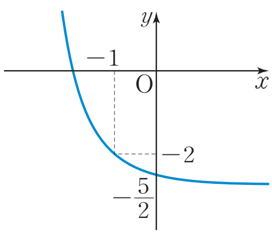
대 / 단 / 원 평가 문제

선택형

1 지수함수 $y=2^{-x}$에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 그래프는 점 $(1,\ 0)$을 지난다.
② 점근선은 y축이다.
③ 제4사분면을 지난다.
④ x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
⑤ 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 평행이동하면 겹쳐진다.

2 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+a}+b$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $a+b$의 값은?

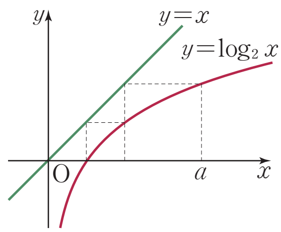


① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

3 로그함수 $y=-\log_2(x-2)+1$에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① 정의역은 $\{x\,|\,x>2\}$이다.
② 치역은 모든 실수이다.
③ 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2$이다.
④ x값이 증가하면 y값은 감소한다.
⑤ 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 평행이동하면 겹쳐진다.

4 오른쪽 그림은 로그함수 $y=\log_2 x$와 직선 $y=x$의 그래프를 나타낸 것이다. a의 값은? (단, 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

5 함수 $y=\log_2(x+1)-2$의 역함수가 $y=a^{x+b}+c$일 때, 세 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1
④ 2 ⑤ 3

6 처음에 50마리인 박테리아가 x시간 후에는 $50a^x\ (a>0)$마리가 된다고 한다. 4시간 후 이 박테리아가 4050마리가 되었을 때, 박테리아가 36450마리가 되는 것은 몇 시간 후인가?

① 6시간 후 ② 7시간 후 ③ 8시간 후
④ 9시간 후 ⑤ 10시간 후

7 $\lim_{x\to\infty}(4^x-3^x)^{\frac{1}{2x}}$의 값은?

① 0 ② 1 ③ $\sqrt{2}$
④ 2 ⑤ 3

8 $\lim_{x\to 2}(\log_2|x^3-8|-\log_2|x^2-4|)$의 값은?

① $\log_2 3+1$ ② $\log_2 3-1$ ③ $\log_2 3$
④ $2\log_2 3$ ⑤ $\log_2 6$

9 다음 중 극한값이 옳지 않은 것은?

① $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}}=e^3$

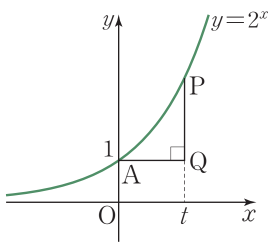
② $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

③ $\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=1$

④ $\lim_{x\to 0}\left\{\dfrac{\log_2(1-x)}{x}\right\}^x=\log_2 e$

⑤ $\lim_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{x}=\ln 3$

10 곡선 $y=2^x$ 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(t,\ 2^t)$에서 x축에 내린 수선과 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$을 지나고 x축과 평행한 직선이 만나는 점을 Q라고 할 때,



$\lim_{t\to 0}\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{AQ}}}$의 값은?

① 1 ② $\log_2 e$ ③ $-\log_2 e$
④ $\dfrac{1}{\ln 2}$ ⑤ $\ln 2$

11 함수 $f(x)=e^x$에 대하여

$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1-2h)}{h}$의 값은?

① e ② $2e$ ③ $3e$
④ $\dfrac{1}{e}$ ⑤ $\dfrac{1}{e^2}$

12 함수 $f(x)=x^2\ln x$에 대하여 $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}$의 값은?

① $-\dfrac{1}{e}$ ② 1 ③ $\dfrac{1}{e}$
④ $\dfrac{2}{e}$ ⑤ e

서답형

13 다음 극한값을 구하여라.

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right\}^n$$

14 다음 함수가 $x=1$에서 미분가능할 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

(1) $f(x)=\begin{cases}2^x & (x\geq 1)\\ ax+b & (x<1)\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}\ln x & (0<x\leq 1)\\ ax+b & (x>1)\end{cases}$

|서|술|형|

15 $0<a<1$일 때, 정의역이 $\{x|0\leq x\leq 3\}$인 함수 $y=a^{x^2-4x+3}$의 최댓값이 8이다. 이때 상수 a의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

|서|술|형|

16 한 번 통과하면 60 %의 불순물이 제거되는 정수 필터가 있다. 불순물의 양을 처음 양의 2 % 이하가 되게 하려면 정수 필터를 최소한 몇 번 통과시켜야 하는지 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라. (단, $\log 2=0.3$으로 계산한다.)

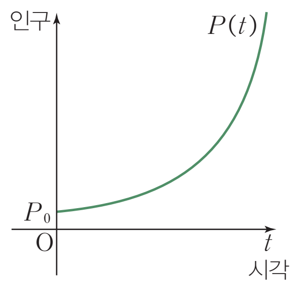
M+ Real Life

수 학 + 실 생 활

맬서스의 인구 성장 모델

영국의 경제학자 맬서스(Malthus, T. R. ; 1766~1834)는 1798년에 발표한 '인구론'에서 식량은 일차함수적으로 증가하여 생산되는 데 반하여 인구는 지수함수적으로 증가한다는 가설을 제시하였다. 따라서 역사 속의 모든 인구 증가가 결국 빈곤으로 이어졌으며 이는 인구의 증가가 식량과 같은 자원의 증가보다 급격하게 이루어지기 때문에 일어나는 현상이라고 주장하였다. 또한 토지의 생산과 인구의 증가 사이에 존재하는 이러한 자연적인 불균형은 인류의 불안정의 원인이 되고 점차 사회 체제를 흔들게 될 것이라고 하였다.

맬서스는 현재의 인구수를 P_0이라고 할 때, 시각 t에서의 인구를 $P(t)$라고 하면 $P(t)$는 다음과 같이 나타낼 수 있다고 하였다.

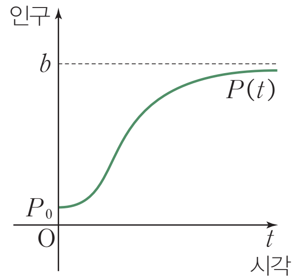


$P(t)=P_0e^{rt}$ (단, r는 인구 증가율)

이러한 인구 모형을 맬서스의 인구 성장 모델 또는 지수 성장 모델이라고 한다.

한편 일반적인 인구 모형에서는 인구가 적은 초창기에는 지수함수적으로 성장을 하지만, 현실적으로 식량, 거주 공간, 다른 천연자원의 영향을 받기 때문에 성장이 제한된다.

이러한 점을 고려하여 벨기에의 수학자 베르흘스트(Verhulst, P. F. ; 1804~1849)는 맬서스의 인구 성장 모델에 대해 다음과 같은 수정 모델을 제시하였다.



현재의 인구수를 P_0이라고 할 때, 시각 t에서의 인구 $P(t)$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P(t)=\frac{bP_0}{P_0+ae^{-rt}}$$ (단, a, b는 상수, r는 인구 증가율)

이러한 수정 모델을 로지스틱(logistic) 모델이라고 하는데, 이 식으로부터 알 수 있는 것은 인구수가 초기에는 급격하게 증가하지만 어느 순간부터는 완만하게 증가하여 일정하게 유지된다는 것이다.

이러한 특성은 자연 현상이나 사회 현상에서도 나타날 수 있다.

특정한 지역에 신도시가 건설되면 그 지역을 중심으로 인구가 밀집되기 시작한다. 그 인구를 수용하기 위하여 시간이 흐를수록 주변에 상업 지역, 거주 지역이 생기기 시작하여 대도시의 교외가 무계획적이고 무질서하게 발전하는 현상이 나타난다. 그러나 그 팽창은 도시 근교일수록 빠르지만 도시에서의 거리가 증가할수록 무한히 팽창하지 못하고 일정한 수준에서 정지한다.

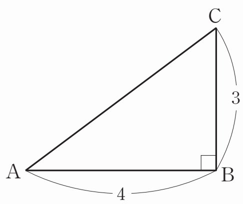
삼각형을 이용한 삼각측량법은 먼 바다를 항해하는
범선의 위치를 파악하는 데 이용되고 있다.

삼각함수

| 준 | 비 | 학 | 습 |

중③ 삼각비

1 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{BC}}=3$일 때, $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$의 값을 각각 구하여라.



중③ 삼각비

2 다음 표의 빈칸에 알맞은 수를 써넣어라.

A	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$			
$\cos A$			$\frac{\sqrt{2}}{2}$		0
$\tan A$	0			$\sqrt{3}$	

미적분 I 함수의 극한

3 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\theta}{n}$ (단, $0^\circ\le\theta\le 90^\circ$)

1 삼각함수의 뜻과 그래프

하루에 두 번씩 갈라지는 바닷길

제부도는 경기도 화성시 앞바다에 위치한 작은 섬이다. 이 섬의 넓이는 $1\ \mathrm{km}^2$이고, 해안선 길이는 $12\ \mathrm{km}$에 불과해 여의도보다 작은 섬이지만 주말이면 많은 사람들이 찾는 곳이다.

이렇듯 작은 섬에 많은 사람들이 찾아오는 것은 바닷길이 갈라지는 자연 현상으로 유명하기 때문이다. 제부도는 하루 두 차례씩 뭍과 제부도를 연결하는 바닷길이 얼굴을 내민다. 바다가 썰물일 때, $4\sim5\ \mathrm{m}$ 깊이의 바닷물이 빠져나가 바다 속에 잠겨 있던 $2.3\ \mathrm{km}$의 바닷길이 모습을 드러낸다.

흔히 '모세의 기적'이라 불리는 이 현상 덕에 제부도는 관광 명소가 되었다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자.

73쪽

해수면의 최대 높이와 그때의 시각을 알 수 있을까?

01 일반각과 호도법

- 일반각과 호도법의 뜻을 안다.
- 호도법을 이용하여 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 나타낼 수 있다.

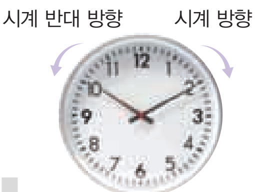
일반각이란 무엇인가?

생각 열기

다이얼 잠금장치

서류나 귀중품을 보관하는 금고의 잠금장치 중에는 숫자가 적힌 다이얼을 여러 번 돌려 번호를 정확하게 맞추어야 열리도록 설계되어 있는 것이 있다. 이런 잠금장치를 열기 위해서는 다이얼을 올바른 방향으로 돌려야 하며 돌리는 양도 정확해야 한다.

탐구 활동



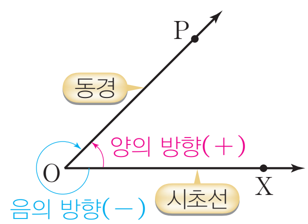
금고의 잠금장치를 열기 위하여 다이얼을 시계 반대 방향으로 두 바퀴 돌린 후, 시계 방향으로 한 바퀴 반 돌렸다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 다이얼을 시계 반대 방향으로 돌린 각의 크기는 모두 몇 도인가?
2. 다이얼을 시계 방향으로 돌린 각의 크기는 모두 몇 도인가?
3. 다이얼의 위치는 처음 위치에서 어느 방향으로 몇 도 돌린 각의 크기와 같은지 말하여 보자.

지금까지는 각의 크기를 0°에서 360°까지의 범위로 나타내었다. 하지만 다이얼 잠금장치와 같이 여러 바퀴를 회전하거나 회전하는 방향을 구분해야 할 필요가 있을 때에는 좀 더 넓은 범위의 각의 크기가 필요하다.

이제 각의 크기의 뜻을 정의하고, 그 범위를 확장하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 두 반직선 OX, OP에 의해 정해진 $\angle XOP$의 크기는 반직선 OP가 점 O를 중심으로 반직선 OX에서 반직선 OP의 위치까지 회전한 양으로 정의한다. 이때 반직선 OX를 **시초선**, 반직선 OP를 **동경**이라고 한다.

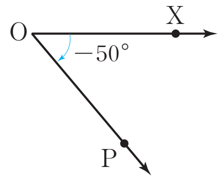


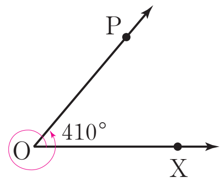
또한 동경 OP가 점 O를 중심으로 회전할 때, 시계 반대 방향을 양의 방향, 시계 방향을 음의 방향이라고 정하고, 음의 방향으로 회전하여 생기는 각의 크기는 음의 부호(−)를 붙여서 나타낸다.

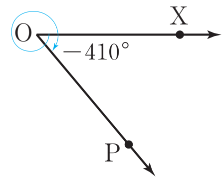
- 시초선은 처음 시작하는 선이라는 뜻이고, 동경은 움직이는 선이라는 뜻이다.
- 양의 방향으로 회전하여 생기는 각의 크기는 양의 부호(+)를 붙여 나타내지만 보통 생략한다.

따라서 ∠XOP의 동경 OP는 점 O를 중심으로 음의 방향으로 회전하면 각의 크기를 음수의 범위로 확장할 수 있다. 또 한 바퀴 이상 회전할 수 있으므로 360°보다 큰 각 또는 -360°보다 작은 각을 생각할 수 있다.

이를테면 -50°, 410°, -410°인 각을 그림으로 나타내면 다음과 같다.







문제 1 다음 각에 대한 시초선과 동경의 위치를 그림으로 나타내어라.

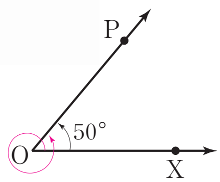
(1) 30°　　(2) -120°

(3) 440°　　(4) -750°

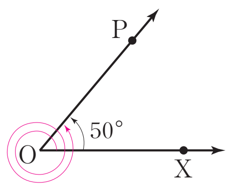
시초선 OX는 고정되어 있으므로 ∠XOP의 크기가 정해지면 동경 OP의 위치도 하나로 정해진다.

그러나 동경 OP의 위치가 정해지더라도 시초선 OX로부터 동경 OP가 어느 방향으로 회전하였는가 또는 몇 바퀴를 회전하였는가에 따라 ∠XOP의 크기는 여러 가지 값을 가질 수 있으므로 ∠XOP의 크기는 하나로 정해지지 않는다.

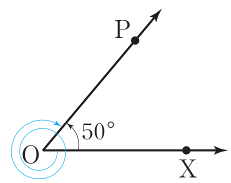
이를테면 다음 그림과 같이 동경 OP의 위치는 50°로 정해져 있지만 ∠XOP의 크기는 410°, 770°, -670° 등 여러 가지 값을 가질 수 있다.



$360^\circ\times1+50^\circ$
$=410^\circ$



$360^\circ\times2+50^\circ$
$=770^\circ$



$360^\circ\times(-2)+50^\circ$
$=-670^\circ$

일반적으로 α°는 $0^\circ\le\alpha^\circ<360^\circ$의 범위에서 나타낸다.

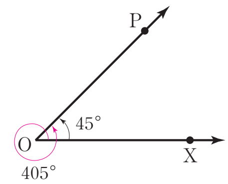
일반적으로 시초선 OX와 동경 OP가 나타내는 한 각의 크기를 α°라고 하면 ∠XOP의 크기는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$360^\circ\times n+\alpha^\circ \text{ (단, } n\text{은 정수)}$$

이것을 동경 OP가 나타내는 **일반각**이라고 한다.

보기 시초선 OX와 동경 OP가 나타내는 한 각이 405°이면 $405^\circ=360^\circ\times1+45^\circ$이므로 405°와 45°가 나타내는 동경은 일치한다. 따라서 405°의 동경이 나타내는 일반각은 다음과 같다.

$$360^\circ\times n+45^\circ \text{ (단, } n\text{은 정수)}$$

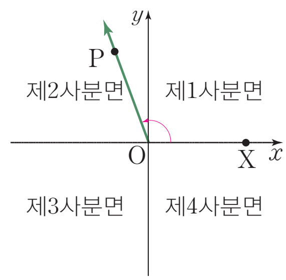


문제 2 다음 각의 동경이 나타내는 일반각을 구하여라.

(1) 70°　　(2) 420°

(3) -770°　　(4) -1200°

일반각의 꼭짓점을 좌표평면 위의 원점 O에 잡고, 시초선 OX를 x축의 양의 방향으로 잡을 때, 동경 OP가 좌표평면의 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면에 있으면 동경 OP가 나타내는 각을 각각 제1사분면의 각, 제2사분면의 각, 제3사분면의 각, 제4사분면의 각이라고 한다.



동경이 좌표축 위에 있으면 어느 사분면에도 속하지 않는다.

보기 (1) $780^\circ=360^\circ\times2+60^\circ$이므로 780°는 제1사분면의 각이다.
(2) $-210^\circ=360^\circ\times(-1)+150^\circ$이므로 -210°는 제2사분면의 각이다.

문제 3 다음 각은 제 몇 사분면의 각인지 말하여라.

(1) 300°　　(2) 1200°

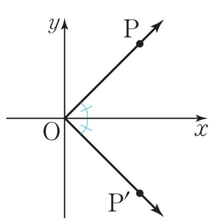
(3) -150°　　(4) -700°

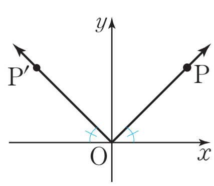
사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

두 동경 OP와 OP′이 다음과 같을 때, 두 동경이 나타내는 일반각 사이에는 어떤 관계가 있는지 토의하여 보자.

(1) x축에 대하여 대칭　　(2) y축에 대하여 대칭





호도법이란 무엇인가?

생각 열기

별의 일주

카메라로 밤하늘의 사진을 찍을 때, 오랜 시간 동안 셔터를 열고 찍으면 천체들이 움직인 자취가 곡선으로 나타난 별의 일주 사진을 얻을 수 있다. 오른쪽 그림은 북극성을 중심으로 찍은 일주 사진으로, 별의 자취가 북극성을 중심으로 하는 원의 호 모양을 이루고 있으며 그 길이는 노출 시간에 비례한다.

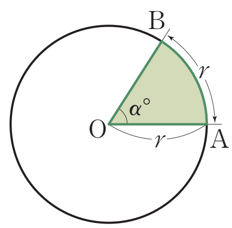
탐구 활동

다음 물음에 답하여 보자.

1. 생각 열기의 별의 일주 사진에서 모든 호의 중심각의 크기가 같은지 말하여 보자.
2. 반지름의 길이와 호의 길이가 같을 때, 부채꼴의 중심각의 크기는 반지름의 길이에 관계없이 항상 일정하다고 할 수 있는지 말하여 보자.

지금까지는 각의 크기를 나타낼 때, 30°, 60°, 120°와 같이 도$(^\circ)$를 단위로 하는 육십분법을 사용하였다. 이제 각의 크기를 나타내는 새로운 단위에 대하여 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 r인 원에서 길이가 r인 호 AB에 대한 중심각 $\angle$AOB의 크기는 반지름의 길이 r에 관계없이 일정하다. 이때 부채꼴의 중심각 $\angle$AOB의 크기를 α°라고 하면, 한 원에서 호의 길이는 중심각의 크기에 비례하므로 다음이 성립한다.



$$2\pi r : r = 360^\circ : \alpha^\circ,\quad \alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}$$

따라서 이 부채꼴의 중심각의 크기 α°는 반지름의 길이 r에 관계없이 일정하다. 이 일정한 각의 크기 $\dfrac{180^\circ}{\pi}$를 1 **라디안**이라 하고, 이것을 단위로 하여 각의 크기를 나타내는 방법을 **호도법**이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

라디안(radian)은 반지름(radius)과 각(angle)을 나타내는 영어 단어의 합성어이다.

육십분법과 호도법 사이의 관계

$$1\text{라디안}=\frac{180^\circ}{\pi},\quad 1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{라디안}$$

호도법을 사용할 때에는 흔히 라디안이라는 단위를 생략한다.

보기 (1) $30^\circ=30\times\frac{\pi}{180}$(라디안)$=\frac{\pi}{6}$(라디안) (2) $\frac{\pi}{3}$(라디안)$=\frac{\pi}{3}\times\frac{180^\circ}{\pi}=60^\circ$

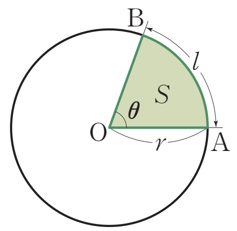
문제 4 다음에서 육십분법은 호도법으로, 호도법은 육십분법으로 나타내어라.

(1) 60° (2) -150°

(3) $\frac{2}{3}\pi$ (4) $-\frac{3}{2}\pi$

호도법으로 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 나타내어 보자.

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴 OAB에서 호의 길이를 l이라고 하면 호의 길이는 중심각의 크기에 비례하므로



$360^\circ=360\times\frac{\pi}{180}$
$=2\pi$(라디안)

$$2\pi r : l=2\pi : \theta$$

$$l=r\theta$$

이다. 또 부채꼴의 넓이를 S라고 하면 부채꼴의 넓이도 중심각의 크기에 비례하므로

$$\pi r^2 : S=2\pi : \theta$$

$$S=\frac{1}{2}r^2\theta$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

부채꼴의 호의 길이와 넓이

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면

$$l=r\theta,\ S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$$

문제 5 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴에서 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 할 때, 다음을 구하여라.

(1) $r=3$이고 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때, l과 S의 값

(2) $l=2$이고 $\theta=45^\circ$일 때, r와 S의 값

문제 6 호의 길이가 π cm이고, 넓이가 $\frac{3}{2}\pi$ cm^{2}인 부채꼴의 반지름의 길이와 중심각의 크기를 구하여라.

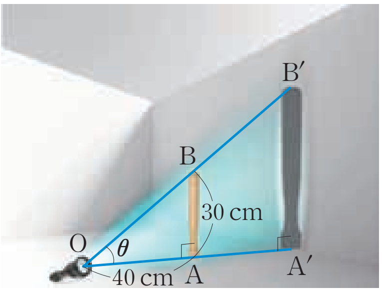
02 삼각함수

● 삼각함수의 뜻을 안다.

삼각함수란 무엇인가?

탐구 활동

오른쪽 그림과 같이 점 O에서 빛을 비추고, 점 O로부터 40 cm 떨어져 있는 점 A에 길이가 30 cm인 막대를 수직으로 세웠다. 이때 벽면에 생긴 그림자의 길이를 $\overline{A'B'}$이라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.



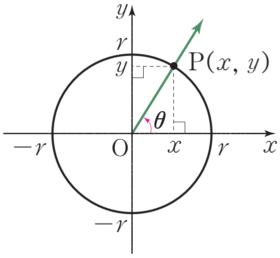
1. $\sin\theta$의 값을 구하여 보자.

2. **1**을 이용하여 $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}}$의 값을 구하여 보자.

중학교에서는 0°에서 90°까지의 삼각비의 값은 직각삼각형의 크기에 관계없이 일정함을 배웠다.

이제 삼각비의 정의를 일반각으로 확장하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에서 x축의 양의 부분을 시초선, 일반각 θ의 동경을 OP라고 하자. 이때 반지름의 길이가 r인 원과 동경 OP의 교점을 $P(x,\ y)$라고 하면



$$\frac{y}{r},\ \frac{x}{r},\ \frac{y}{x}\ (x\neq 0)$$

의 값은 반지름의 길이 r에 관계없이 θ에 따라 각각 하나씩 결정된다. 즉,

$$\theta \longrightarrow \frac{y}{r},\ \theta \longrightarrow \frac{x}{r},\ \theta \longrightarrow \frac{y}{x}\ (x\neq 0)$$

의 대응 관계는 각각 θ에 대한 함수이다.

이 함수를 각각 θ에 대한 **사인함수**, **코사인함수**, **탄젠트함수**라고 하며, 다음과 같이 나타낸다.

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r},\ \tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq 0)$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$이면 θ에 대한 삼각함수는 삼각비와 일치한다.

csc, sec, cot는 각각 cosecant, secant, cotangent의 약자이다.

한편 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 역수로 정의한 함수를 차례대로 코시컨트함수, 시컨트함수, 코탄젠트함수라고 하며, 다음과 같이 나타낸다.

$$\mathbf{csc}\,\theta=\frac{r}{y}\,(y\neq0),\ \mathbf{sec}\,\theta=\frac{r}{x}\,(x\neq0),\ \mathbf{cot}\,\theta=\frac{x}{y}\,(y\neq0)$$

즉, 다음이 성립함을 알 수 있다.

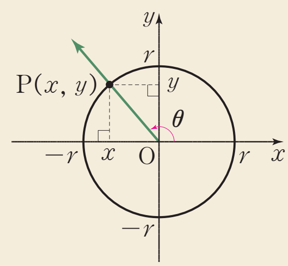
$$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta},\ \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta},\ \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$

이상에서 정의한 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수, 코시컨트함수, 시컨트함수, 코탄젠트함수를 통틀어 일반각 θ에 대한 **삼각함수**라고 한다.

삼각함수의 정의

$\sin\theta=\frac{y}{r}$, $\cos\theta=\frac{x}{r}$, $\tan\theta=\frac{y}{x}\,(x\neq0)$

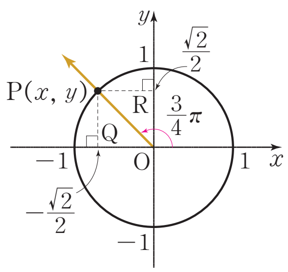
$\csc\theta=\frac{r}{y}\,(y\neq0)$, $\sec\theta=\frac{r}{x}\,(x\neq0)$, $\cot\theta=\frac{x}{y}\,(y\neq0)$



예제 01 $\theta=\frac{3}{4}\pi$일 때, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\csc\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$의 값을 각각 구하여라.

삼각함수의 값은 원의 반지름의 길이 r에 관계없이 일정하므로 $r=1$로 생각하면 편리하다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\frac{3}{4}\pi$를 나타내는 동경 OP와 단위원의 교점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 $\angle\mathrm{POQ}=\frac{\pi}{4}$이므로 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$이다.



이때 $\overline{\mathrm{OP}}=1$이므로 삼각함수의 정의에 의하여

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\theta=\frac{x}{r}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \tan\theta=\frac{y}{x}=-1$$

$$\csc\theta=\frac{r}{y}=\sqrt{2},\ \sec\theta=\frac{r}{x}=-\sqrt{2},\ \cot\theta=\frac{x}{y}=-1$$

문제 1 다음 각 θ에 대하여 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\csc\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$의 값을 각각 구하여라.

(1) $\frac{\pi}{3}$　　(2) $-\frac{5}{4}\pi$

(3) 210°　　(4) -60°

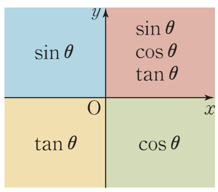
동경이 위치한 사분면에 따라 삼각함수의 값의 부호는 어떻게 결정되는지 알아보자.

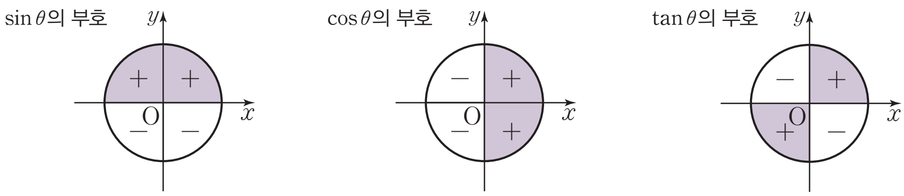
각 θ를 나타내는 동경 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 x좌표와 y좌표의 부호는 동경이 위치한 사분면에 따라 결정되므로 삼각함수의 값의 부호는 다음 표와 같이 정해진다.

● r는 원점과 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 사이의 거리이므로 $r>0$이다.

사분면 / 삼각함수	제1사분면 $(x>0,\ y>0)$	제2사분면 $(x<0,\ y>0)$	제3사분면 $(x<0,\ y<0)$	제4사분면 $(x>0,\ y<0)$
$\sin\theta=\frac{y}{r}$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\theta=\frac{x}{r}$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\theta=\frac{y}{x}$	$+$	$-$	$+$	$-$

● 각 사분면에서 그 값이 양수인 삼각함수를 적으면 다음 그림과 같다.





한편 $\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$, $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$이므로 $\csc\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$의 부호는 각각 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 부호와 같다.

예제 02 $\theta=\dfrac{20}{3}\pi$일 때, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\csc\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$값의 부호를 말하여라.

풀이 각 θ의 동경은 $\dfrac{20}{3}\pi=6\pi+\dfrac{2}{3}\pi=2\pi\times3+\dfrac{2}{3}\pi$

각 θ는 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

$\csc\theta>0$, $\sec\theta<0$, $\cot\theta<0$

문제 2 다음 각 θ에 대하여 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\csc\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$값의 부호를 말하여라.

(1) $\dfrac{51}{5}\pi$　　(2) $-\dfrac{22}{3}\pi$

(3) $1280°$　　(4) $-750°$

문제 3 다음을 만족시키는 각 θ는 제 몇 사분면의 각인지 말하여라.

(1) $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$　　(2) $\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$

(3) $\sin\theta\cos\theta>0$　　(4) $\dfrac{\sec\theta}{\tan\theta}>0$

삼각함수 사이에는 어떤 관계가 있는가?

탐구 활동

오른쪽 그림은 범선의 모형을 제작한 것이다. 범선에 달려 있는 돛은 밑변의 길이가 6 cm, 높이가 8 cm인 직각삼각형이라고 한다. 이 돛의 밑변과 빗변이 이루는 각을 θ라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

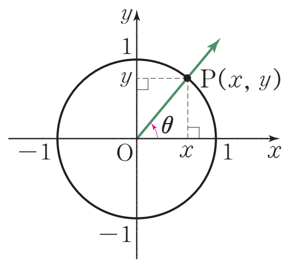
1. $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 각각 구하여 보자.

2. **1**에서 구한 값을 이용하여 $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$의 값과 $\tan\theta$의 값을 비교하여 보자.

3. **1**에서 구한 값을 이용하여 $\sin^2\theta+\cos^2\theta$의 값을 구하여 보자.

삼각함수 사이에는 어떤 관계가 있는지 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 $\mathrm{P}(x, y)$라고 하면 삼각함수의 정의에 의하여



$$\sin\theta=y,\ \cos\theta=x,\ \tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq0)$$

이므로

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

임을 알 수 있다.

한편 점 $\mathrm{P}(x, y)$는 단위원 위의 점이므로

$$x^2+y^2=1$$

이 성립한다.

그런데 $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$이므로

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

임을 알 수 있다.

$\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$는 각각 $(\sin\theta)^2$, $(\cos\theta)^2$을 의미하고, $(\sin\theta)^2\neq\sin\theta^2$임에 주의한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

삼각함수 사이의 관계

(1) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ (2) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

예제 **03** $\sin\theta=\frac{3}{5}$일 때, $\cos\theta$와 $\tan\theta$의 값을 구하여라. $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

풀이 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\theta>0$

따라서 $\cos\theta=\frac{4}{5}$

한편 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로 $\tan\theta=\frac{3}{4}$

답 $\cos\theta=\frac{4}{5}$, $\tan\theta=\frac{3}{4}$

문제 **4** $\cos\theta=-\frac{5}{13}$일 때, $\sin\theta$와 $\tan\theta$의 값을 구하여라. $\left(\text{단, } \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$

예제 **04** $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$일 때, $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구하여라.

풀이 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$2\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{4}$, $\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

답 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

문제 **5** $\sin\theta-\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, 다음 식의 값을 구하여라. $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

(1) $\sin\theta\cos\theta$

(2) $\sin\theta+\cos\theta$

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

삼각함수 사이의 관계를 이용하여 다음 등식이 성립함을 설명하여 보자.

(1) $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$

(2) $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

03 삼각함수의 그래프와 성질

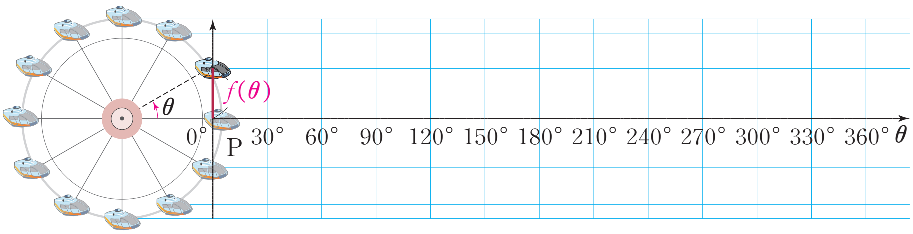
● 삼각함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다.

사인함수의 그래프는 어떻게 그리는가?

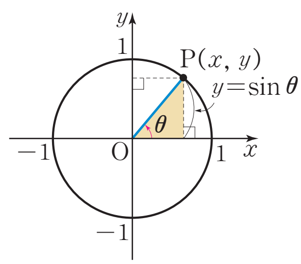
탐구 활동

놀이공원의 대관람차가 회전하면 곤돌라의 높이는 시시각각으로 변한다. 다음 그림과 같이 한 곤돌라가 P지점에서 시계 반대 방향으로 θ만큼 회전하였을 때의 높이를 $f(\theta)$라고 하자. 물음에 답하여 보자.

1. $\theta=0^{\circ}, 30^{\circ}, 60^{\circ}, 90^{\circ}, \cdots, 330^{\circ}, 360^{\circ}$일 때, $(\theta, f(\theta))$를 다음 그림에 점으로 나타내어 보자.



2. **1**에서 구한 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하여 보자.

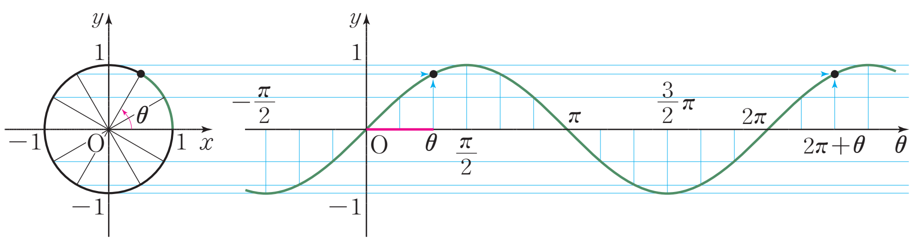


오른쪽 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 $\mathrm{P}(x, y)$라고 하면

$$\sin\theta=\frac{y}{1}=y$$

이므로 점 P가 단위원 위를 움직일 때, $\sin\theta$의 값은 점 P의 y좌표에 의하여 정해진다.

단위원을 이용하여 각 θ의 크기의 변화에 따른 $\sin\theta$의 값의 변화를 좌표평면 위에 나타내어 함수 $y=\sin\theta$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



앞의 그래프에서 알 수 있듯이 함수 $y=\sin\theta$의 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$이다. 또 함수 $y=\sin\theta$는 모든 실수에서 연속이다.

한편 $y=\sin\theta$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, 2π 간격으로 같은 모양이 반복된다. 따라서 임의의 각 θ에 대하여

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta$$

$$\sin(2n\pi+\theta)=\sin\theta\ (n\text{은 정수})$$

가 성립함을 알 수 있다.

일반적으로 함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 모든 x에 대하여

$$f(x+p)=f(x)$$

를 만족시키는 상수 $p(p\ne 0)$가 존재할 때, 함수 $f(x)$를 **주기함수**라 하고, 이 상수 p 중에서 가장 작은 양수를 주기함수 $f(x)$의 **주기**라고 한다.

따라서 $y=\sin\theta$는 주기가 2π인 주기함수이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

사인함수 $y=\sin\theta$의 그래프와 성질

(1) 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$이다.
(2) 모든 실수에서 연속이다.
(3) $y=\sin\theta$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 즉, $\sin(-\theta)=-\sin\theta$이다.
(4) 주기가 2π인 주기함수이다. 즉, $\sin(2n\pi+\theta)=\sin\theta$ (n은 정수)이다.

보기 (1) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

(2) $\sin\frac{9}{4}\pi=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

문제 1 다음 삼각함수의 값을 구하여라.

(1) $\sin(-420^\circ)$ (2) $\sin\frac{7}{3}\pi$

예제 01 함수 $y=\sin 2x$의 주기를 구하고, 그래프를 그려라.

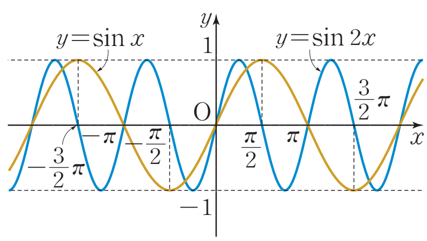
풀이 $f(x)=\sin 2x$라고 하면

$f(x)=\sin 2x=\sin(2x+2\pi)$

$=\sin 2(x+\pi)=f(x+\pi)$

이므로 함수 $y=\sin 2x$의 주기는 π이다.

따라서 $y=\sin 2x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



문제 2 다음 함수의 주기를 구하고, 그래프를 그려라.

(1) $y=\sin\dfrac{x}{2}$　　　　(2) $y=\sin(-3x)$

예제 02

다음 함수의 치역과 주기를 구하고, 그래프를 그려라.

(1) $y=2\sin x$　　　　(2) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

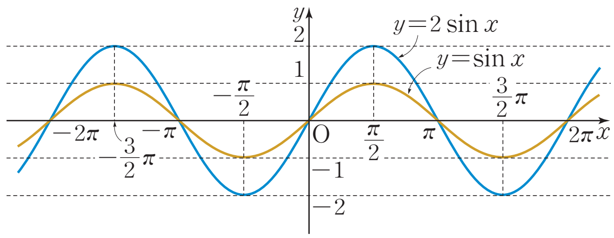
풀이 (1) $f(x)=2\sin x$라고 하면

$$f(x)=2\sin x=2\sin(x+2\pi)=f(x+2\pi)$$

이므로 함수 $y=2\sin x$의 주기는 2π이다.

또 $-1\le\sin x\le1$에서 $-2\le2\sin x\le2$이므로 치역은 $\{y\,|\,-2\le y\le2\}$이다.

따라서 $y=2\sin x$의 그래프는 다음과 같다.



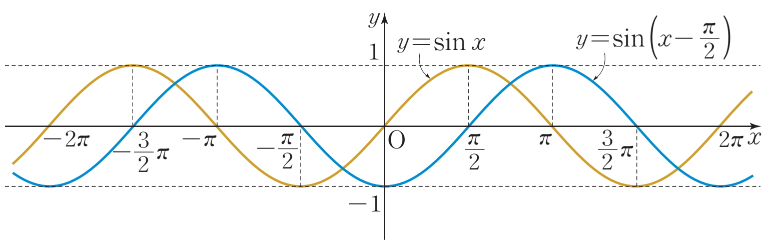
(2) $f(x)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$라고 하면

$$f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}+2\pi\right)=\sin\left\{(x+2\pi)-\frac{\pi}{2}\right\}=f(x+2\pi)$$

이므로 함수 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$의 주기는 2π이다.

또 $-1\le\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\le1$이므로 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le1\}$이다.

따라서 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 다음과 같다.



문제 3 다음 함수의 주기와 치역을 구하고, 그래프를 그려라.

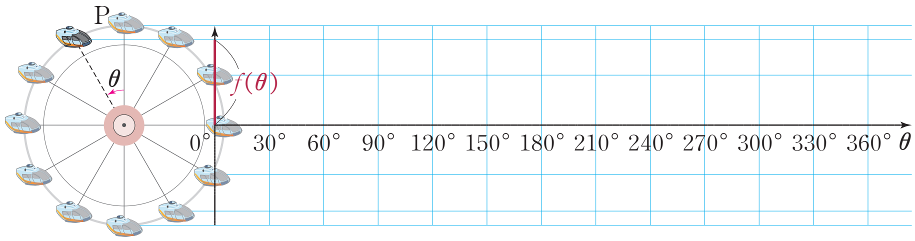
(1) $y=\dfrac{1}{2}\sin x$　　　　(2) $y=\sin(x+\pi)$

코사인함수의 그래프는 어떻게 그리는가?

탐구 활동

다음 그림과 같이 곤돌라가 P지점에서 시계 반대 방향으로 θ만큼 회전하였을 때의 높이를 $f(\theta)$라고 하자. 물음에 답하여 보자.

1. $\theta=0°$, $30°$, $60°$, $90°$, $\cdots$, $330°$, $360°$일 때, $(\theta, f(\theta))$를 다음 그림에 점으로 나타내어 보자.

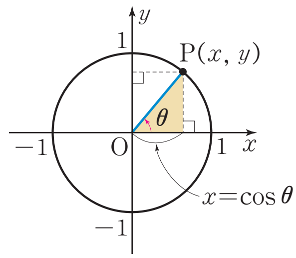


2. **1**에서 구한 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하여 보자.

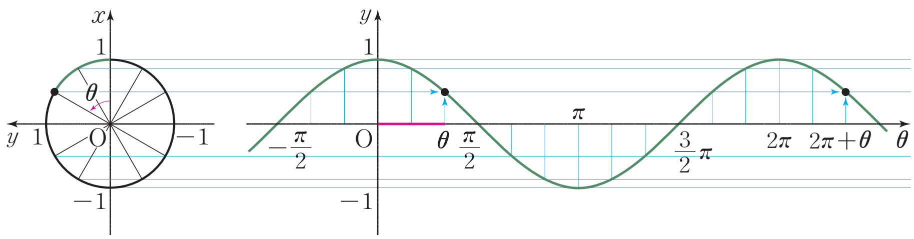
오른쪽 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면

$$\cos\theta=\frac{x}{1}=x$$

이므로 점 P가 단위원 위를 움직일 때, $\cos\theta$의 값은 점 P의 x좌표에 의하여 정해진다.



단위원을 이용하여 각 θ의 크기의 변화에 따른 $\cos\theta$의 값의 변화를 좌표평면 위에 나타내어 함수 $y=\cos\theta$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



위의 그래프에서 알 수 있듯이 함수 $y=\cos\theta$의 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$이다. 또 함수 $y=\cos\theta$는 모든 실수에서 연속이다.

한편 $y=\cos\theta$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, 2π 간격으로 같은 모양이 반복된다.

따라서 임의의 각 θ에 대하여

$$\cos(-\theta)=\cos\theta$$

$$\cos(2n\pi+\theta)=\cos\theta \ (n\text{은 정수})$$

가 성립함을 알 수 있다.

따라서 $y=\cos\theta$는 사인함수와 마찬가지로 주기가 2π인 주기함수이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

코사인함수 $y=\cos\theta$의 그래프와 성질

(1) 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y\mid -1\le y\le 1\}$이다.
(2) 모든 실수에서 연속이다.
(3) $y=\cos\theta$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. 즉, $\cos(-\theta)=\cos\theta$이다.
(4) 주기가 2π인 주기함수이다. 즉, $\cos(2n\pi+\theta)=\cos\theta$ (n은 정수)이다.

보기 (1) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\cos\frac{13}{3}\pi=\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

문제 4 다음 삼각함수의 값을 구하여라.

(1) $\cos\left(-\frac{13}{6}\pi\right)$ (2) $\cos 765°$

예제 03 함수 $y=\cos\frac{x}{2}$의 주기를 구하고, 그래프를 그려라.

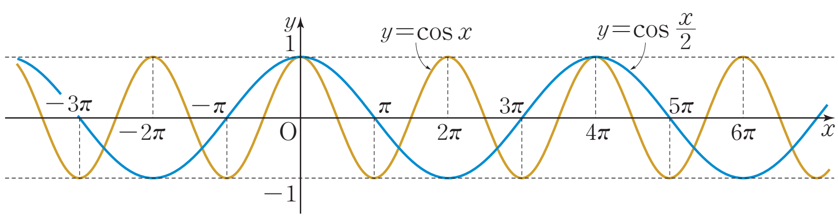
풀이 $f(x)=\cos\frac{x}{2}$라고 하면

$$f(x)=\cos\frac{x}{2}=\cos\left(\frac{x}{2}+2\pi\right)=\cos\left\{\frac{1}{2}(x+4\pi)\right\}=f(x+4\pi)$$

이므로 함수 $y=\cos\frac{x}{2}$의 주기는 4π이다.

또 $-1\le\cos\frac{x}{2}\le 1$이므로 치역은 $\{y\mid -1\le y\le 1\}$이다.

따라서 $y=\cos\frac{x}{2}$의 그래프는 다음과 같다.



문제 5 다음 함수의 주기를 구하고, 그래프를 그려라.

(1) $y=\cos 2x$ (2) $y=\cos(-3x)$

예제 04 함수 $y=2\cos 2x$의 주기와 치역을 구하고, 그래프를 그려라.

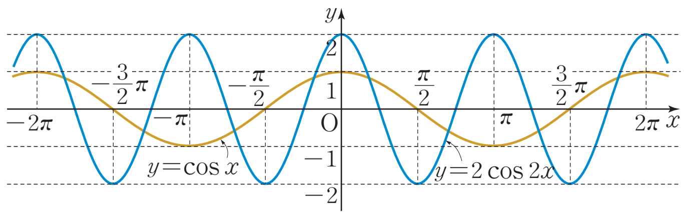
풀이 $f(x)=2\cos 2x$라고 하면

$f(x)=2\cos 2x=2\cos(2x+2\pi)=2\cos\{2(x+\pi)\}=f(x+\pi)$

이므로 함수 $y=2\cos 2x$의 주기는 π이다.

또 $-1\le\cos 2x\le 1$에서 $-2\le 2\cos 2x\le 2$이므로 치역은 $\{y\,|\,-2\le y\le 2\}$이다.

따라서 $y=2\cos 2x$의 그래프는 다음과 같다.



문제 6 다음 함수의 주기와 치역을 구하고, 그래프를 그려라.

(1) $y=\frac{1}{2}\cos \pi x$ (2) $y=-2\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

사고력 기르기

▶ 추론
의사소통
문제 해결

다음 물음에 답하여 보자.

(1) 다음 표를 완성하여 보자.

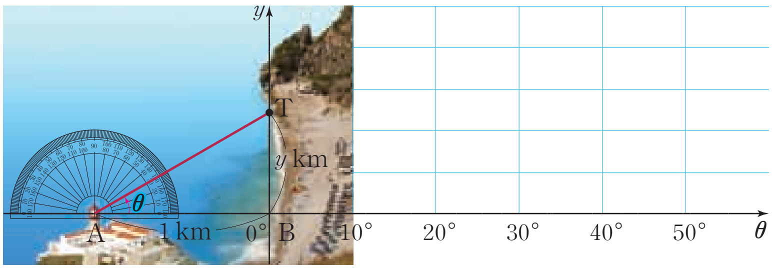
$y=\cos ax$	$y=\cos(-2x)$	$y=\cos(-x)$	$y=\cos\left(-\frac{1}{2}x\right)$	$y=\cos\frac{1}{2}x$	$y=\cos x$	$y=\cos 2x$
주기					2π	

(2) 실수 $a\,(a\neq 0)$에 대하여 삼각함수 $y=\cos ax$의 주기를 나타내는 방법을 말하여 보자.

탄젠트함수의 그래프는 어떻게 그리는가?

탐구 활동

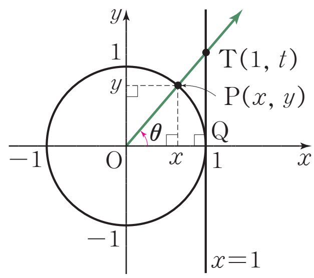
다음 그림과 같이 점 A에서 시계 반대 방향으로 회전하는 등대의 불빛이 직선인 해안선을 따라서 비추고 있다. 등대에서 해안선까지의 거리 $\overline{\mathrm{AB}}=1$ km이고, 등대의 불빛이 $\overline{\mathrm{AB}}$에서 θ만큼 회전하였을 때, 해안선에 비추는 점을 T라고 한다. $\overline{\mathrm{BT}}=y$ km라고 할 때, 물음에 답하여 보자.



1. $\theta=0°$, $10°$, $20°$, $30°$, $40°$, $50°$일 때, 점 $(\theta,\ y)$를 위의 그림에 점으로 나타내어 보자.

2. **1**에서 구한 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하고, 동경 OP의 연장선이 직선 $x=1$과 만나는 점을 $\mathrm{T}(1,\ t)$라고 하자.

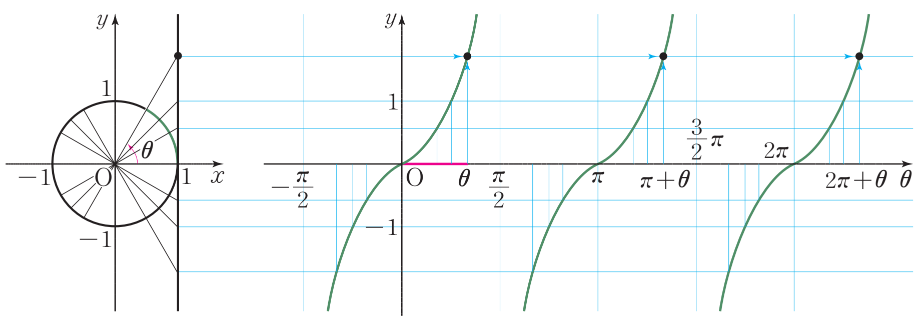


이때 점 T에서 x축에 내린 수선의 발을 $\mathrm{Q}(1,\ 0)$이라고 하면

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\overline{\mathrm{QT}}}{\overline{\mathrm{OQ}}}=\frac{t}{1}=t$$

이므로 점 P가 단위원 위를 움직일 때, $\tan\theta$의 값은 점 T의 y좌표에 의하여 정해진다.

단위원을 이용하여 각 θ의 크기의 변화에 따른 $\tan\theta$의 값의 변화를 좌표평면 위에 나타내어 함수 $y=\tan\theta$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



앞의 그래프에서 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)의 동경 OP는 y축 위에 있다. 이때 점 P의 x좌표는 0이므로 $\tan\theta$의 값은 정의되지 않고, 직선 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)는 모두 $y=\tan\theta$의 그래프의 점근선이다.

곡선이 한없이 가까워지는 직선이 있을 때, 이 직선을 곡선의 점근선이라고 한다.

따라서 함수 $y=\tan\theta$의 정의역은 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)를 제외한 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다. 또 함수 $y=\tan\theta$는 정의역의 모든 점에서 연속이다.

한편 $y=\tan\theta$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, π 간격으로 같은 모양이 반복된다. 따라서 임의의 각 θ에 대하여

$$\tan(-\theta)=-\tan\theta$$

$$\tan(n\pi+\theta)=\tan\theta \ (n\text{은 정수})$$

가 성립함을 알 수 있다.

따라서 $y=\tan\theta$는 주기가 π인 주기함수이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

탄젠트함수 $y=\tan\theta$의 그래프와 성질

(1) 정의역은 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)를 제외한 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.
(2) 정의역의 모든 점에서 연속이다.
(3) $y=\tan\theta$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 즉, $\tan(-\theta)=-\tan\theta$이다.
(4) 주기가 π인 주기함수이다. 즉, $\tan(n\pi+\theta)=\tan\theta$ (n은 정수)이다.
(5) 점근선은 직선 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.

보기 (1) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

(2) $\tan\frac{7}{6}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

문제 7 다음 삼각함수의 값을 구하여라.

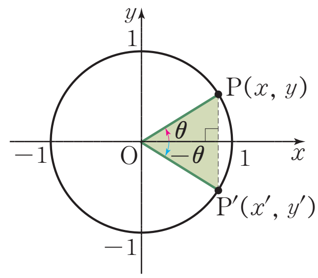
(1) $\tan\left(-\frac{5}{4}\pi\right)$ (2) $\tan 240^\circ$

문제 8 오른쪽 그림과 같은 단위원을 이용하여 다음이 성립함을 확인하여라.

(1) $\sin(-\theta)=-\sin\theta$

(2) $\cos(-\theta)=\cos\theta$

(3) $\tan(-\theta)=-\tan\theta$



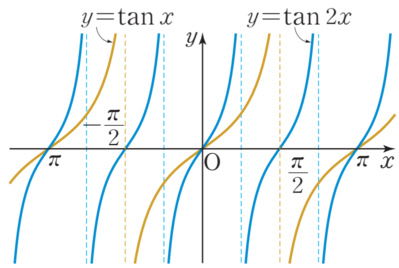
예제 05 함수 $y=\tan 2x$의 주기를 구하고, 그래프를 그려라.

풀이 $f(x)=\tan 2x$라고 하면

$$f(x)=\tan 2x=\tan(2x+\pi)$$
$$=\tan\left\{2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

이므로 함수 $y=\tan 2x$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

따라서 $y=\tan 2x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



문제 9 다음 함수의 주기를 구하고, 그래프를 그려라.

(1) $y=\tan 3x$　　(2) $y=\tan(-2x)$

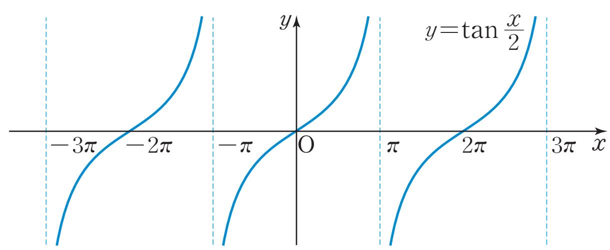
예제 06 함수 $y=\tan\frac{x}{2}$의 주기를 구하고, 그래프를 그려라. 또 점근선의 방정식을 구하여라.

풀이 $f(x)=\tan\frac{x}{2}$라고 하면

$$f(x)=\tan\frac{x}{2}=\tan\left(\frac{x}{2}+\pi\right)=\tan\frac{1}{2}(x+2\pi)=f(x+2\pi)$$

이므로 함수 $y=\tan\frac{x}{2}$의 주기는 2π이다.

따라서 $y=\tan\frac{x}{2}$의 그래프는 다음과 같다.



또 점근선의 방정식은 $x=(2n+1)\pi$ (n은 정수)이다.

문제 10 다음 함수의 주기를 구하고, 그래프를 그려라. 또 점근선의 방정식을 구하여라.

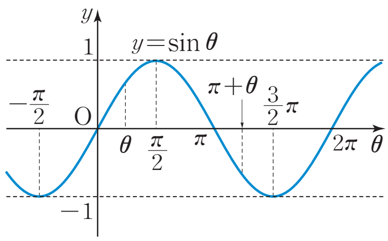
(1) $y=2\tan x$ (2) $y=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

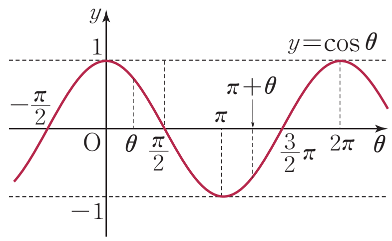
문제 11 함수 $y=\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$의 주기를 구하고, 그래프를 그려라.

삼각함수는 어떤 성질이 있는가?

각 $\pi+\theta$에 대한 삼각함수를 알아보자.

다음 그림의 함수 $y=\sin\theta$와 함수 $y=\cos\theta$의 그래프에서 π 간격으로 각 함숫값의 부호가 바뀜을 알 수 있다.





따라서 임의의 각 θ에 대하여

$$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$$

이다.

한편 함수 $y=\tan\theta$는 주기가 π인 주기함수이므로 임의의 각 θ에 대하여

$$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

θ에 $-\theta$를 대입하면
$\sin(\pi-\theta)$
$=-\sin(-\theta)=\sin\theta$
$\cos(\pi-\theta)$
$=-\cos(-\theta)=-\cos\theta$
$\tan(\pi-\theta)$
$=\tan(-\theta)=-\tan\theta$

각 $\pi+\theta$에 대한 삼각함수

$$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$$
$$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$$

보기 (1) $\sin\frac{7}{6}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

(2) $\cos\frac{4}{3}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

(3) $\tan\frac{5}{4}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$

문제 12 다음 삼각함수의 값을 구하여라.

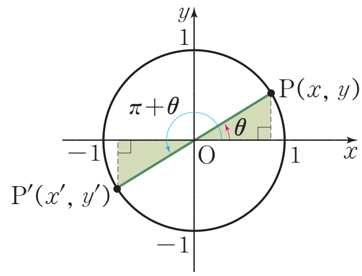
(1) $\sin\frac{4}{3}\pi$　　(2) $\cos(-210^\circ)$　　(3) $\tan\frac{4}{3}\pi$

문제 13 오른쪽 그림과 같은 단위원을 이용하여 다음이 성립함을 확인하여라.

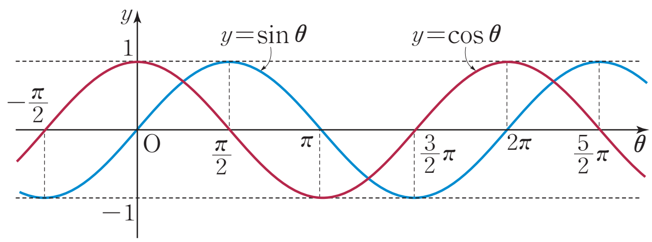
(1) $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

(2) $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

(3) $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$



각 $\frac{\pi}{2}+\theta$에 대한 삼각함수를 알아보자.



위의 그림에서 알 수 있듯이 함수 $y=\sin\theta$의 그래프는 $y=\cos\theta$의 그래프를 θ축의 양의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것과 같다.

따라서 임의의 각 θ에 대하여

$$\sin\theta=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),\ \text{즉}\ \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$$

이다. 이때

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$$

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\frac{1}{\tan\theta}=-\cot\theta$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

각 $\frac{\pi}{2}+\theta$에 대한 삼각함수

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$$

● θ에 $-\theta$를 대입하면

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$
$=\cos(-\theta)=\cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$
$=-\sin(-\theta)=\sin\theta$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$
$=-\frac{1}{\tan(-\theta)}=\cot\theta$

보기 (1) $\sin\frac{3}{4}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\cos\frac{5}{6}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan\frac{2}{3}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\cot\frac{\pi}{6}=-\sqrt{3}$

문제 14 다음 삼각함수의 값을 구하여라.

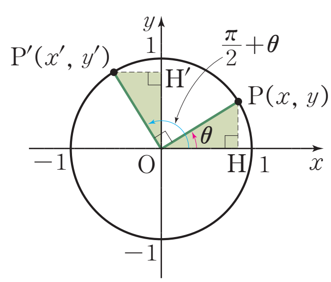
(1) $\sin 150^\circ$ (2) $\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$ (3) $\tan 135^\circ$

문제 15 오른쪽 그림과 같은 단위원을 이용하여 다음이 성립함을 확인하여라.

(1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$

(2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

(3) $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$



지금까지 공부한 삼각함수의 그래프와 그 성질을 이용하면 임의의 각에 대한 삼각함수를 0°에서 90° 사이의 각에 대한 삼각함수로 나타낼 수 있다.

따라서 0°에서 90° 사이의 각에 대한 삼각함수의 값을 알면 임의의 각에 대한 삼각함수의 값을 구할 수 있다. 이 책의 부록에 있는 삼각함수표에는 0°에서 90° 사이의 각에 대한 삼각함수의 값이 나와 있다.

P. 221 삼각함수표

예제 07

다음 삼각함수의 값을 삼각함수표를 이용하여 구하여라.

(1) $\sin 140^\circ$ (2) $\tan 335^\circ$

풀이 (1) $\sin 140^\circ = \sin(180^\circ - 40^\circ) = \sin 40^\circ$

삼각함수표에서 $\sin 40^\circ = 0.6428$이므로

$\sin 140^\circ = 0.6428$

(2) $\tan 335^\circ = \tan(360^\circ - 25^\circ) = \tan(-25^\circ)$

$= -\tan 25^\circ$

삼각함수표에서 $\tan 25^\circ = 0.4663$이므로

$\tan 335^\circ = -0.4663$

각	라디안	sin	⋯
40°	⋮	0.6428	⋮

각	라디안	⋯	tan
25°	⋮	⋮	0.4663

답 (1) 0.6428 (2) -0.4663

문제 16

다음 삼각함수의 값을 삼각함수표를 이용하여 구하고, 공학용 계산기를 이용하여 비교하여라.

(1) $\sin 160^\circ$ (2) $\cos 1004^\circ$ (3) $\tan(-301^\circ)$

사고력 기르기

추론

의사소통

▶문제 해결

다음 삼각함수의 값을 구하여 보자.

(1) $\sin^2 0^\circ + \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \cdots + \sin^2 89^\circ + \sin^2 90^\circ$

(2) $\tan^2 1^\circ \times \tan^2 2^\circ \times \tan^2 3^\circ \times \cdots \times \tan^2 88^\circ \times \tan^2 89^\circ$

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

안산 조위 관측소는 제부도 부근 해안에서 실시간으로 해수면의 높이를 관측하는 장소이다. 이 관측소의 자료를 이용하여 시각 x시에 따른 해수면의 높이 y cm를 다음과 같은 식으로 나타내었을 때, 물음에 답하여라. 〈2013. 6. 27.〉

$$y = 395\cos\left(\frac{2\pi}{13}x - \frac{17}{15}\pi\right) + 483 \quad (0 \le x < 24)$$

(1) 해수면의 높이가 가장 높은 시각과 그때의 해수면의 높이를 구하여라.

(2) 해수면의 높이가 가장 낮은 시각과 그때의 해수면의 높이를 구하여라.

(3) 해수면의 높이의 주기를 구하여라.

04

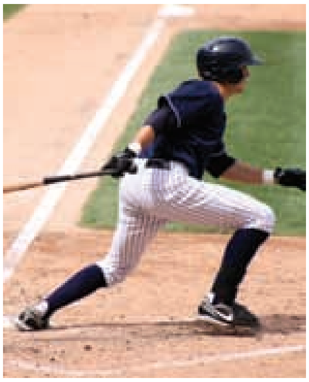
삼각함수의 활용

● 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.

삼각함수는 방정식과 부등식에 어떻게 활용되는가?

탐구 활동

타자가 친 야구공의 처음 속력이 v m/s이고, 처음 지면과의 각도가 x라디안일 때, 야구공이 날아간 거리는 약 $\frac{v^2}{10}\sin 2x$ m라고 한다. 다음 물음에 답하여 보자. (단, 야구공은 바닥에서 출발하고, 공기 저항은 없다고 가정한다.)



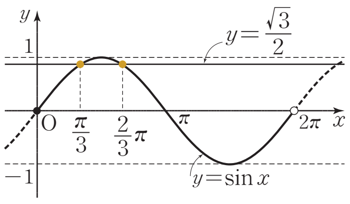
1. 야구공이 날아간 거리가 최대가 되는 $\sin 2x$의 값은 얼마인가?
2. 야구공이 날아간 거리가 최대가 되는 각도 x의 값을 구하는 식을 세워 보자.

탐구 활동에서의 식 $\sin 2x=1$과 같이 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함하는 방정식의 해는 삼각함수의 그래프나 단위원을 이용하여 구할 수 있다.

예제 01 방정식 $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$을 풀어라. (단, $0\le x<2\pi$)

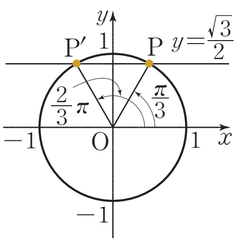
풀이 ❶ 그래프를 이용하는 방법

다음 그림과 같이 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표가 구하는 해이다.



❷ 단위원을 이용하는 방법

다음 그림과 같이 단위원과 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점 P, P′에 대하여 동경 OP, OP′이 나타내는 각의 크기가 구하는 해이다.



답 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$

문제 1 다음 방정식을 풀어라. (단, $0 \le x < 2\pi$)

(1) $\sin x = -\frac{1}{2}$ (2) $\cos x = \frac{1}{2}$

문제 2 다음 방정식을 풀어라. (단, $0 \le x < 2\pi$)

(1) $\tan x - \sqrt{3} = 0$ (2) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$

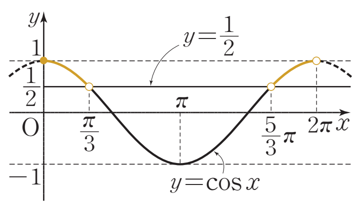
$\sin x < \frac{1}{2}$과 같이 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함하는 부등식은 방정식의 경우와 마찬가지로 삼각함수의 그래프나 단위원을 이용하여 구할 수 있다.

예제 02

부등식 $\cos x > \frac{1}{2}$을 풀어라. (단, $0 \le x < 2\pi$)

풀이 ❶ 그래프를 이용하는 방법

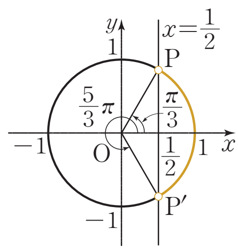
다음 그림과 같이 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5}{3}\pi$이다.



따라서 구하는 해는 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 윗부분에 있는 x값의 범위이다.

❷ 단위원을 이용하는 방법

다음 그림과 같이 단위원과 직선 $x=\frac{1}{2}$의 교점 P, P′에 대하여 동경 OP, OP′이 나타내는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5}{3}\pi$이다.



따라서 구하는 해는 (교점의 x좌표)$>\frac{1}{2}$인 동경이 나타내는 x값의 범위이다.

답 $0 \le x < \frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$

문제 3 다음 부등식을 풀어라. (단, $0 \le x < 2\pi$)

(1) $\sin x > -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　　(2) $\cos x < -\dfrac{1}{2}$

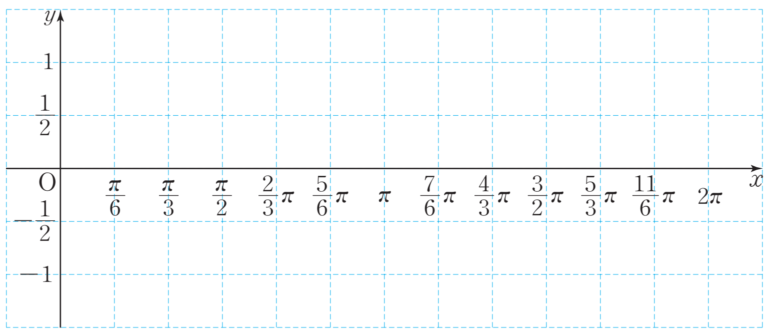
문제 4 다음 부등식을 풀어라. (단, $0 \le x < 2\pi$)

(1) $2\sin x < \sqrt{2}$　　　　(2) $\sqrt{3}\tan x - 1 > 0$

발전

문제 5 부등식 $\sin x < \cos x$에 대하여 다음 물음에 답하여라. (단, $0 \le x < 2\pi$)

(1) 주어진 x값의 범위에서 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 그래프를 그려라.



(2) 두 그래프의 교점을 찾고, 교점의 x좌표를 구하여라.

(3) 그래프에서 $\sin x < \cos x$를 만족시키는 x값의 범위를 구하여라.

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

다음 부등식을 풀어라. (단, $0 \le x < 2\pi$)

$$2\cos^2 x + (2-\sqrt{2})\cos x - \sqrt{2} \le 0$$

중단원 기초

1 다음에서 육십분법은 호도법으로, 호도법은 육십분법으로 나타내어라.

(1) 45° (2) -420° (3) $\frac{3}{4}\pi$ (4) $-\frac{4}{3}\pi$

01 일반각과 호도법

2 반지름의 길이가 6, 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하여라.

01 일반각과 호도법
부채꼴의 호의 길이와 넓이

3 각 θ의 동경이 다음 점을 지날 때, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 구하여라.

(1) $(3,\ 4)$ (2) $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(3) $(-2,\ -1)$ (4) $(1,\ -1)$

02 삼각함수
삼각함수의 정의

4 다음 함수의 주기를 구하고, 그래프를 그려라.

(1) $y=\sin(-2x)$ (2) $y=\cos 4x$ (3) $y=\tan\frac{x}{3}$

03 삼각함수의 그래프와 성질

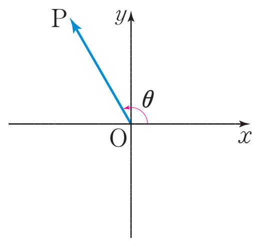
5 다음 방정식과 부등식을 풀어라. (단, $0\le x<2\pi$)

(1) $\sin x=\frac{1}{2}$ (2) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\tan x=-1$

(4) $\sin x>-\frac{1}{2}$ (5) $\cos x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ (6) $\tan x>1$

04 삼각함수의 활용
방정식과 부등식

1 오른쪽 그림에서 각 θ의 동경과 4θ의 동경이 일치할 때, θ의 크기를 구하여라. (단, $0<\theta<\pi$)



01 일반각과 호도법

2 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$일 때, 다음 식의 값을 구하여라. $\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

(1) $\sin\theta\cos\theta$

(2) $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$

02 삼각함수
삼각함수 사이의 관계

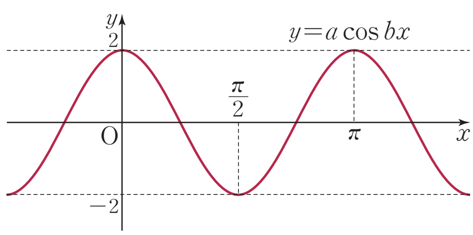
3 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\sin(\pi+\theta)+\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi+\theta\right)$

(2) $\sin^2\theta+\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin^2(\pi+\theta)+\sin^2\left(\dfrac{3}{2}\pi+\theta\right)$

03 삼각함수의 그래프와 성질

4 오른쪽 그림은 $y=a\cos bx$의 그래프를 나타낸 것이다. 상수 a, b의 값을 구하여라.
(단, $a>0$, $b>0$)

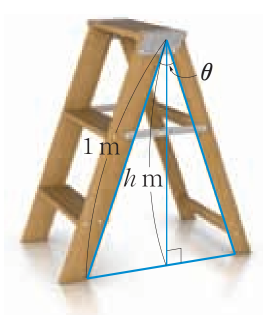


03 삼각함수의 그래프와 성질

5 함수 $y=\tan\left(\dfrac{1}{2}x+\pi\right)$의 주기를 구하고, 그래프를 그려라.

03 삼각함수의 그래프와 성질

6 오른쪽 그림은 길이가 1 m인 사다리를 이등변삼각형 모양으로 펼친 것이다. 이 사다리의 높이 h m가 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le h\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이고, 펼쳐진 사다리가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, θ의 범위를 구하여라.



04 삼각함수의 활용
부등식

중단원 실력

1 용찬이는 밤 11시 30분에 잠이 들어서 아침 6시 10분에 일어났다. 용찬이가 잠자리에 든 후부터 아침에 일어날 때까지 움직인 시곗바늘에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 시계의 긴바늘이 회전한 각의 크기를 육십분법으로 구하여라.

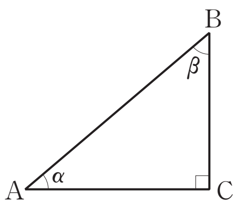
(2) 시계의 짧은바늘이 회전한 각의 크기를 호도법으로 구하여라.

01 일반각과 호도법

2 x에 대한 이차방정식 $x^2-ax-a^2=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$일 때, 상수 a의 값을 모두 구하여라.

02 삼각함수

3 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형에서 직각이 아닌 두 각의 크기를 각각 α, β라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

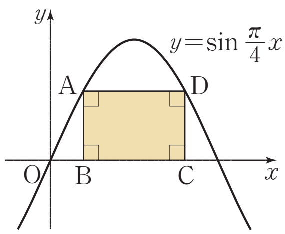


(1) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta$의 값을 구하여라.

(2) $\sin(\alpha-\beta)$를 2α에 대한 삼각함수로 나타내어라.

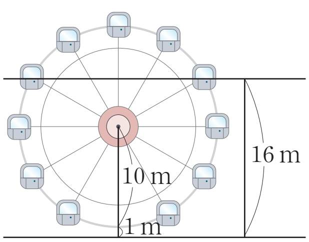
03 삼각함수의 그래프와 성질

4 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\sin\frac{\pi}{4}x$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형에 직사각형 ABCD가 내접하고 있다. $\overline{BC}=2$일 때, 직사각형 ABCD의 넓이를 구하여라.



03 삼각함수의 그래프와 성질

5 반지름의 길이가 10 m인 원형의 놀이 기구가 지상에서 11 m인 곳에 있는 원의 중심을 기준으로 하여 3분에 한 바퀴씩 일정한 속력으로 돌고 있다. 동희가 놀이 기구를 타고 한 바퀴 돌 때, 탑승한 칸이 지상에서 16 m 이상인 곳에 있는 동안의 시간을 구하여라.



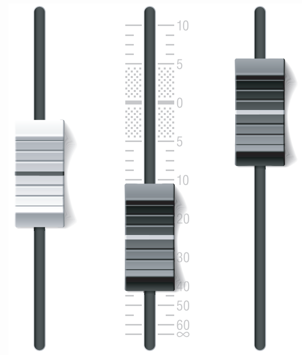
(단, 탑승한 칸은 반지름의 길이가 10 m인 원주 위의 한 점이라고 생각한다.)

04 삼각함수의 활용

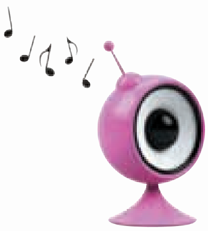
부등식

2 삼각함수의 미분

소리는 사인함수와 코사인함수의 합으로 나타낼 수 있다.



우리 귀에 들리는 소리는 공기 속에서 파동으로 전달된다. 특히 사람의 목소리도 파동으로 전달되는데, 이 파동의 모양을 시각적으로 표현한 것을 성문(聲紋)이라고 한다. 성문은 보통 매우 복잡한 형태의 곡선으로 나타나지만 말하는 사람마다 각기 다른 모양을 가지기 때문에 지문과 같은 역할을 할 수 있다고 한다. 영화나 드라마에서 목소리를 이용하여 범죄 수사를 하는 장면을 볼 수 있는 것도 이러한 성문의 특징 때문이다.



19세기 초 프랑스의 수학자 푸리에(Fourier, J. B. J. ; 1768~1830)는 아무리 복잡한 형태의 곡선이라도 그것이 주기적이라면 몇 개의 사인함수 또는 코사인함수의 합으로 표현할 수 있다는 사실을 발표하였다. 푸리에가 발표한 이 원리를 이용하면 복잡한 형태의 성문도 여러 개의 사인함수 또는 코사인함수의 합으로 나타낼 수 있다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 87쪽

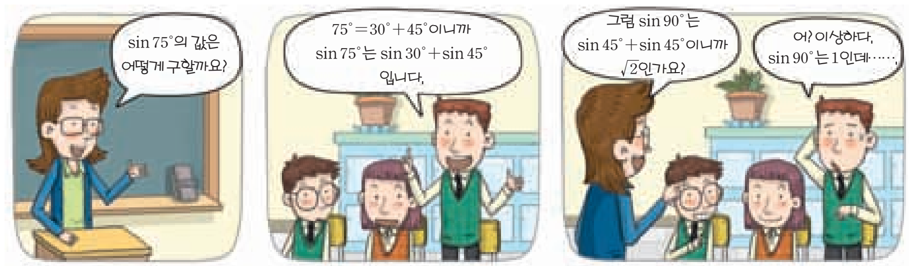
사인함수와 코사인함수로 나타나는 여러 소리의 파동의 합을 하나의 삼각함수로 나타낼 수 있을까?

01 삼각함수의 덧셈정리

● 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.

삼각함수의 덧셈정리란 무엇인가?

생각 열기



탐구 활동 다음 삼각함수표의 값을 이용하여 물음에 답하여 보자.

1. $\sin 50^\circ \cos 20^\circ + \cos 50^\circ \sin 20^\circ$의 값을 구하여 보자.

2. **1**의 결과와 $\sin 70^\circ$의 값을 비교하여 보자.

각(θ)	20°	50°	70°
$\sin\theta$	0.3420	0.7660	0.9397
$\cos\theta$	0.9397	0.6428	0.3420

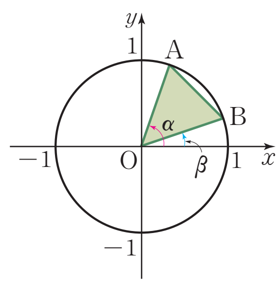
두 각 α, β의 삼각함수를 이용하여 각 $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$의 삼각함수를 나타내는 방법을 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 두 각 α, β를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 각각 A, B라고 하면

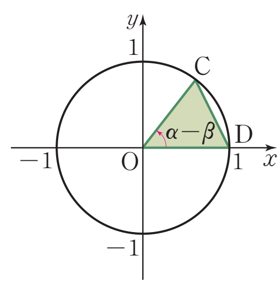
$$A(\cos\alpha, \sin\alpha),\ B(\cos\beta, \sin\beta)$$

이고, 두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= (\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta-\sin\alpha)^2\\ &= 2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$



이다. 한편 원점 O를 중심으로 △OAB를 $-\beta$만큼 회전하면 점 B는 점 D(1, 0)으로 이동하고, 점 A는 점 C로 이동하며 그 좌표는 $C(\cos(\alpha-\beta), \sin(\alpha-\beta))$와 같다.



따라서 두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{CD}^2 &= \{\cos(\alpha-\beta)-1\}^2+\sin^2(\alpha-\beta)\\ &= 2-2\cos(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

이다.

수학 I 평면좌표
좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는
$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
이다.

이때 $\overline{AB}^2=\overline{CD}^2$이므로

$$2-2\cos(\alpha-\beta)=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$

이고, 이 식을 정리하면 다음이 성립한다.

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad \cdots\cdots ①$$

또한 ①은 임의의 각 α, β에 대하여 성립하므로 β 대신에 $-\beta$를 대입하면

$\sin(-\beta)=-\sin\beta$
$\cos(-\beta)=\cos\beta$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

가 성립한다.

한편 $\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$이므로

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right\}\\&=\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right\}\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta\\&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

이고, 이 식을 정리하면 다음이 성립한다.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad \cdots\cdots ②$$

또한 ②에서 β 대신에 $-\beta$를 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)\\&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

가 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같고, 이를 사인함수와 코사인함수의 **덧셈정리**라고 한다.

사인함수와 코사인함수의 덧셈정리

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

보기 $\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

문제 1 다음 삼각함수의 값을 구하여라.

(1) $\sin 15^\circ$ (2) $\cos 105^\circ$ (3) $\cos 15^\circ$

한편 사인함수와 코사인함수의 덧셈정리를 이용하면 다음이 성립한다.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

이 식에서 분자, 분모를 $\cos\alpha\cos\beta\,(\cos\alpha\cos\beta\neq0)$로 나누어 정리하면

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

이다. 즉, 다음이 성립한다.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\qquad\cdots\cdots ③$$

또한 ③에서 β 대신에 $-\beta$를 대입하여 정리하면

$\tan(-\beta)=-\tan\beta$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

가 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같고, 이를 탄젠트함수의 **덧셈정리**라고 한다.

탄젠트함수의 덧셈정리

(1) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

(2) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

보기 $\tan 15^\circ=\tan(45^\circ-30^\circ)=\dfrac{\tan 45^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$

$$=\frac{1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}$$

문제 2 다음 삼각함수의 값을 구하여라.

(1) $\tan 75^\circ$ (2) $\tan 105^\circ$

예제 01

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$이고 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$일 때, $\sin(\alpha+\beta)$의 값을 구하여라.

풀이 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\alpha>0$, $\sin\beta>0$이므로

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$$

따라서

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$$

답 $\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$

문제 3 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$이고 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\beta=-\frac{1}{3}$일 때, 다음 삼각함수의 값을 구하여라.

(1) $\sin(\alpha-\beta)$ (2) $\cos(\alpha+\beta)$ (3) $\tan(\alpha-\beta)$

예제 02

두 직선 $y=-3x+2$, $y=2x+1$이 이루는 예각의 크기를 구하여라.

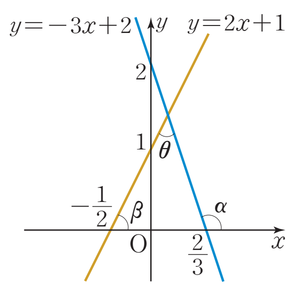
풀이 두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라고 하면 $\tan\alpha=-3$, $\tan\beta=2$

두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면

$\theta=\alpha-\beta$이므로

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\frac{-3-2}{1+(-3)\cdot 2}=1$$

따라서 두 직선이 이루는 예각의 크기는 $45°$이다.



답 $45°$

문제 4 두 직선 $2x-y+1=0$, $x-3y+2=0$이 이루는 예각의 크기를 구하여라.

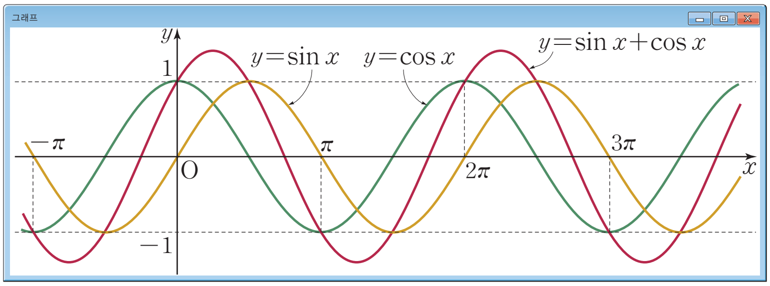
삼각함수의 합성이란 무엇인가?

탐구 활동

다음 그림은 컴퓨터 프로그램을 이용하여 세 삼각함수

$$y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\sin x+\cos x$$

의 그래프를 그린 것이다. 다음 물음에 답하여 보자.



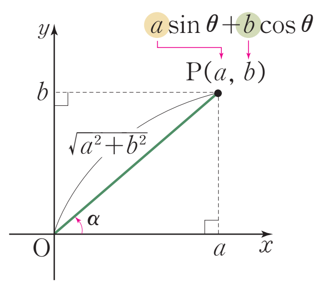
1. 세 함수의 주기가 서로 같은지 확인하여 보자.
2. 함수 $y=\sin x+\cos x$의 최댓값을 a라고 할 때, $y=a\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동한 그래프와 $y=\sin x+\cos x$의 그래프가 겹쳐질 수 있는지 말하여 보자.
3. 적당한 a와 α에 대하여 등식 $\sin x+\cos x=a\sin(x+\alpha)$가 성립할 수 있는지 말하여 보자.

삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $a\sin\theta+b\cos\theta\ (a\neq0,\ b\neq0)$를

$$r\sin(\theta+\alpha)\ (r>0,\ 0\leq\alpha<2\pi)$$

의 꼴로 나타내어 보자.

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$를 잡고, $\overline{\mathrm{OP}}$가 x축의 양의 방향과 이루는 각을 α라고 하면 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{a^2+b^2}$이므로



$$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}a\sin\theta+b\cos\theta&=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)\\&=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\sin\theta+\sin\alpha\cos\theta)\\&=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)\end{aligned}$$

와 같이 나타낼 수 있다.

이와 같이 $a\sin\theta+b\cos\theta\ (a\neq0,\ b\neq0)$를 $r\sin(\theta+\alpha)\ (r>0)$의 꼴로 변형하여 나타내는 것을 삼각함수의 합성이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

삼각함수의 합성

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

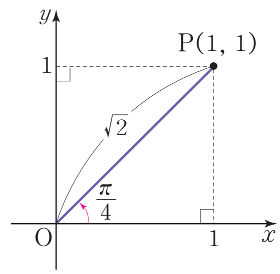
$$\left(\text{단, } \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

참고 $\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$로 놓으면

$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)$의 꼴로도 나타낼 수 있다.

예제 03 $\sin\theta+\cos\theta$를 $r\sin(\theta+\alpha)$의 꼴로 나타내어라. (단, $r>0$, $0\le\alpha<2\pi$)

풀이 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $\mathrm{P}(1,\ 1)$을 잡으면



$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이므로 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$

따라서

$$\begin{aligned}\sin\theta+\cos\theta&=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)\\&=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin\theta+\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta\right)\\&=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

답 $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

문제 5 다음 식을 $r\sin(\theta+\alpha)$의 꼴로 나타내어라. (단, $r>0$, $0\le\alpha<2\pi$)

(1) $-\sin\theta+\cos\theta$

(2) $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$

삼각함수의 합성을 이용하여 삼각함수 $y=a\sin\theta+b\cos\theta$의 주기와 최댓값, 최솟값을 구하여 보자.

$$y=a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

이므로 주기는 2π이다. 또한 $-1\le\sin(\theta+\alpha)\le1$이므로

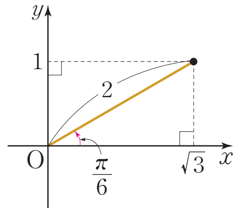
$$-\sqrt{a^2+b^2}\le\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)\le\sqrt{a^2+b^2}$$

이다. 따라서 a, b가 동시에 0이 아니면 $y=a\sin\theta+b\cos\theta$의 최댓값은 $\sqrt{a^2+b^2}$이고, 최솟값은 $-\sqrt{a^2+b^2}$이다.

예제 04

함수 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$의 최댓값과 최솟값, 주기를 각각 구하여라.

풀이 $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$이므로



$$y=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin x+\sin\frac{\pi}{6}\cos x\right)$$

$$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$-2\le 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\le 2$이므로 이 함수의 최댓값은 2, 최솟값은 -2이다.

또 $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x$의 그래프는 $y=2\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동한 것이므로 주기는 2π이다.

답 최댓값: 2, 최솟값: -2, 주기: 2π

문제 6

다음 함수의 최댓값과 최솟값, 주기를 각각 구하여라.

(1) $y=-\sin x-\cos x$ (2) $y=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

서로 다른 두 소리의 파동이 만나면 서로 간섭이 일어나 소리의 크기와 음의 높낮이가 변한다고 한다. 즉, 소리의 파동이 합성되어 파동의 모양이 변한다. 한 곳에 나오는 서로 다른 두 소리의 파동이

$$y=3\sin 120\pi t,\ y=4\cos 120\pi t$$

와 같을 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 두 소리가 합성되어 나오는 소리의 파동의 최댓값과 최솟값, 주기를 구하여라.

(2) (1)의 그래프를 공학적 도구를 이용하여 그리고, 최댓값과 최솟값, 주기를 확인하여라.

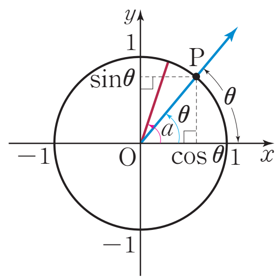
02 삼각함수의 극한

● 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.

삼각함수의 극한은 어떻게 구하는가?

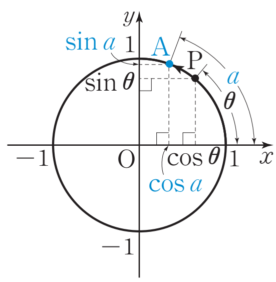
탐구 활동

오른쪽 그림과 같이 단위원 위의 점 P가 점 $(1,\ 0)$에서 시계 반대 방향으로 θ만큼 움직였을 때 점 P의 좌표는 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$이다. 이를 이용하여 다음 물음에 답하여 보자.



1. θ가 a에 한없이 가까워지면 $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값은 각각 어떤 값에 한없이 가까워지는지 말하여 보자.

탐구 활동에서 θ가 a에 한없이 가까워지면 점 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$는 점 $\mathrm{A}(\cos a,\ \sin a)$에 한없이 가까워지므로 점 P의 x좌표 $\cos\theta$는 $\cos a$에 한없이 가까워지고, y좌표 $\sin\theta$는 $\sin a$에 한없이 가까워진다.

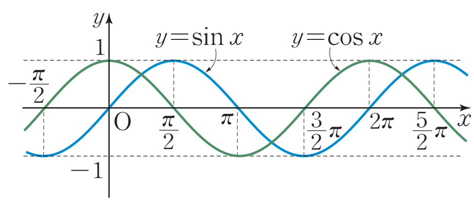


실제로 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 그래프에서 임의의 실수 a에 대하여

$$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a$$

$$\lim_{x\to a}\cos x=\cos a$$

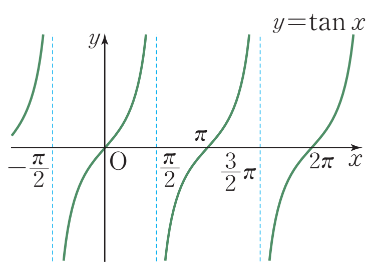
임을 알 수 있다.



또한 탄젠트함수는 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$이므로 $\cos x\neq0$인 구간의 임의의 실수 a에 대하여

$$\lim_{x\to a}\tan x=\tan a$$

임을 그래프를 통하여 알 수 있다.



$\cos x\neq0$인 x의 범위는 $x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.

보기 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan x=1$

문제 1 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \sin x$ (2) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x$ (3) $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \tan x$

예제 01 극한값 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}$ 를 구하여라.

● $\frac{0}{0}$ 꼴이 나오지 않도록 분자 또는 분모의 식을 변형하여 약분한다.

풀이 $\cos^2 x = 1-\sin^2 x = (1+\sin x)(1-\sin x)$이므로

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1-\sin x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1+\sin x) = 1+\sin\frac{\pi}{2} = 2$$

답 2

문제 2 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ (2) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1-\tan^2 x}$

예제 02 극한값 $\lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x}$을 구하여라.

● $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ (α, β는 실수)일 때, a에 가까운 모든 실수 x의 값에 대하여 $f(x) \le h(x) \le g(x)$이고 $\alpha = \beta$이면 $\lim_{x \to a} h(x) = \alpha$

풀이 $x \ne 0$일 때, $0 \le \left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$이므로

$$0 \le \left|x \sin\frac{1}{x}\right| = |x| \cdot \left|\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|$$

이때 $\lim_{x \to 0} |x| = 0$이므로 $\lim_{x \to 0} \left|x \sin\frac{1}{x}\right| = 0$

따라서 $\lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$

답 0

문제 3 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$ (2) $\lim_{x \to 0} x^2 \cos\frac{1}{x}$

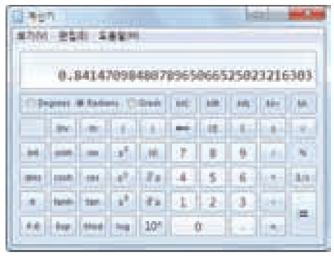
$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$의 값은 어떻게 구하는가?

탐구 활동

컴퓨터에 내장된 계산기는 일반용, 공학용 등 여러 가지 모드로 사용이 가능하다. 공학용 모드로 설정한 계산기를 이용하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 다음 표를 완성하여 보자.

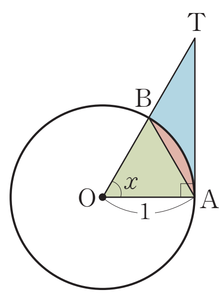
x(라디안)	$\frac{\sin x}{x}$
1	0.8415
0.5	0.9589
0.1	
0.01	
0.001	



2. x의 값이 0에 가까워질 때, $\frac{\sin x}{x}$의 값은 어떤 값에 가까워지는지 추측하여 보자.

함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$의 값을 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 중심이 점 O이고 반지름의 길이가 1인 원에서 부채꼴 OAB의 중심각 ∠AOB의 크기를 x라디안이라 하고, 점 A에서 원 O에 그은 접선과 선분 OB의 연장선의 교점을 T라고 하자.



(i) $0 < x < \frac{\pi}{2}$일 때

△OAB<(부채꼴 OAB의 넓이)<△OAT이므로

$$\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin x < \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x, \text{ 즉 } \sin x < x < \tan x$$

이다.

이때 $\sin x > 0$이므로 각 변을 $\sin x$로 나누면

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \text{ 즉 } 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

이다.

여기서 $\lim_{x \to 0+} \cos x = 1$이므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\theta$이다.

(ii) $-\frac{\pi}{2}<x<0$일 때

$x=-t$로 놓으면 $x \to 0-$일 때 $t \to 0+$이므로

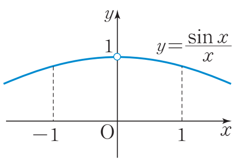
$\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$$\lim_{x\to0-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{t\to0+}\frac{\sin(-t)}{-t}=\lim_{t\to0+}\frac{\sin t}{t}=1$$

이다.

따라서 (i), (ii)에 의하여 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$이 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.



함수 $\frac{\sin x}{x}$의 극한

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1 \text{ (단, } x\text{는 라디안)}$$

예제 03 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}$ (2) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$

풀이 (1) $3x=t$로 놓으면 $x \to 0$일 때 $t \to 0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to0}3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}$$
$$=3\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=3\cdot1=3$$

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot1=1$$

답 (1) 3 (2) 1

문제 4 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{2x}$ (2) $\lim_{x\to0}\frac{\tan 4x}{5x}$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\tan 4x}$ (4) $\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}$

예제 04

다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ (2) $\lim_{x\to \pi}\dfrac{\sin 2x}{x-\pi}$

풀이 (1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right\}=1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

(2) $x-\pi=t$로 놓으면 $x\to\pi$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 2x}{x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2(\pi+t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}2\cdot\frac{\sin 2t}{2t}=2\cdot 1=2$$

답 (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) 2

문제 5

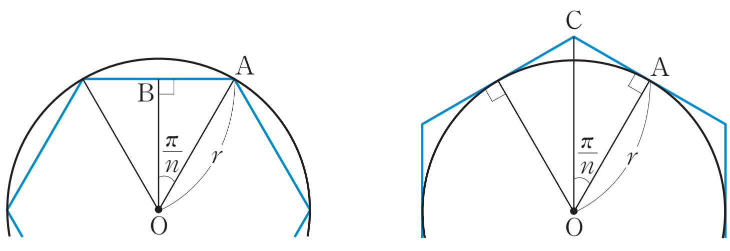
다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$ (2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}$

(3) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\dfrac{\pi}{2}-x}$ (4) $\lim_{x\to\pi}\dfrac{\tan x}{\pi-x}$

창의 up

다음 그림은 반지름의 길이가 r인 원에 내접하는 정n각형과 외접하는 정n각형을 나타낸 것이다. 물음에 답하여라.



(1) 내접하는 정n각형의 둘레의 길이를 $f(n)$, 외접하는 정n각형의 둘레의 길이를 $g(n)$이라고 할 때, 삼각함수를 이용하여 $f(n)$과 $g(n)$을 나타내는 방법을 설명하여라.

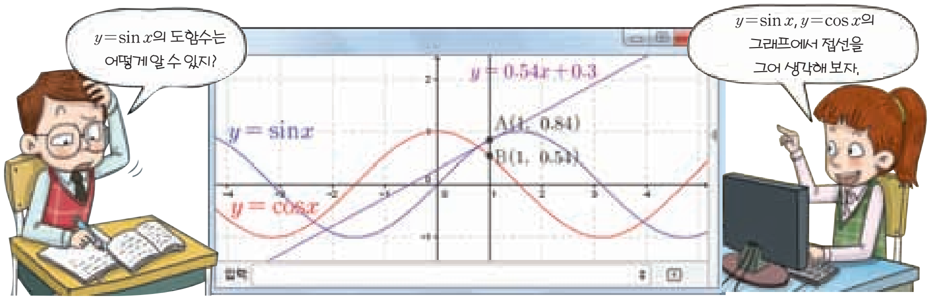
(2) 반지름의 길이가 r인 원의 둘레의 길이를 l이라고 할 때, 부등식 $f(n)<l<g(n)$과 삼각함수의 극한을 이용하여 l의 값을 구하는 방법을 설명하여라.

03 사인함수와 코사인함수의 미분

● 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다.

사인함수와 코사인함수의 도함수는 어떻게 구하는가?

생각 열기



탐구 활동

생각 열기의 그래프에서 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 A와 곡선 $y=\cos x$ 위의 점 B의 x좌표가 같을 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. $y=\sin x$의 $x=1$에서의 미분계수를 말하여 보자.
2. $\cos 1$의 값을 구하여 보자.
3. 1, 2에서 구한 값 사이의 관계를 말하여 보자.

삼각함수의 덧셈정리와 삼각함수의 극한을 이용하여 삼각함수의 도함수를 구하여 보자.

삼각함수 $y=\sin x$에서 도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\sin h-\sin x(1-\cos h)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\sin h}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{\sin x(1-\cos h)}{h}\\ &= \cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}-\sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}=\cos x\end{aligned}$$

가 성립한다.

따라서 $y=\sin x$이면 $y'=\cos x$이다.

$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$

$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}=0$

$y=\cos x$에서 도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{h\to0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{-\sin x\sin h-\cos x(1-\cos h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{-\sin x\sin h}{h}-\lim_{h\to0}\frac{\cos x(1-\cos h)}{h}\\&=-\sin x\cdot\lim_{h\to0}\frac{\sin h}{h}-\cos x\cdot\lim_{h\to0}\frac{1-\cos h}{h}=-\sin x\end{aligned}$$

가 성립한다.

따라서 $y=\cos x$이면 $y'=-\sin x$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

사인함수와 코사인함수의 도함수

(1) $y=\sin x$이면 $y'=\cos x$

(2) $y=\cos x$이면 $y'=-\sin x$

예제 01 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x$ (2) $y=x^2\sin x$

풀이 (1) $y'=(\sqrt{3}\sin x)'-(\cos x)'=\sqrt{3}\cos x-(-\sin x)$

$=\sqrt{3}\cos x+\sin x$

(2) $y'=(x^2)'\sin x+x^2(\sin x)'$

$=2x\sin x+x^2\cos x$

답 (1) $y'=\sqrt{3}\cos x+\sin x$ (2) $y'=2x\sin x+x^2\cos x$

문제 1 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ (2) $y=\sin x\cos x$

문제 2 함수 $y=x\cos x-\sin x$의 $x=\frac{\pi}{3}$에서의 미분계수를 구하여라.

[해답 p. 207]

중단원 기초

1 다음 삼각함수의 값을 구하여라.

01 삼각함수의 덧셈정리

(1) $\sin 105^\circ$ (2) $\sin \dfrac{\pi}{12}$

(3) $\cos 75^\circ$ (4) $\cos \dfrac{7}{12}\pi$

(5) $\tan 195^\circ$ (6) $\tan \dfrac{5}{12}\pi$

2 다음 식을 $r\sin(\theta+\alpha)$의 꼴로 나타내어라.

01 삼각함수의 덧셈정리
삼각함수의 합성

(1) $4\sin\theta+3\cos\theta$ (2) $-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$

3 다음 극한값을 구하여라.

02 삼각함수의 극한

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(\sin x - x\cos x)$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\tan x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{2x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\cos x - 1}$ (6) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$

4 다음 함수를 미분하여라.

03 사인함수와 코사인함수의 미분

(1) $y=\cos x-\sin x$ (2) $y=x\sin x$

[해답 p.207]

중단원 기본

1 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$이고 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\cos\beta=\dfrac{5}{13}$일 때, 다음 값을 구하여라.

(1) $\sin(\alpha+\beta)$　　(2) $\cos(\alpha-\beta)$　　(3) $\tan(\alpha+\beta)$

01 삼각함수의 덧셈정리

2 두 직선 $3x-y+1=0$, $x-2y+2=0$이 이루는 예각의 크기를 θ라고 할 때, $\tan\theta$의 값을 구하여라.

01 삼각함수의 덧셈정리
두 직선이 이루는
예각의 크기

3 함수 $y=3\sin x-2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$의 최댓값과 최솟값, 주기를 각각 구하여라.

01 삼각함수의 덧셈정리
삼각함수의 합성

4 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan(\tan 3x)}{\tan 2x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x-\sin 2x}{\sin x}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x^2}$

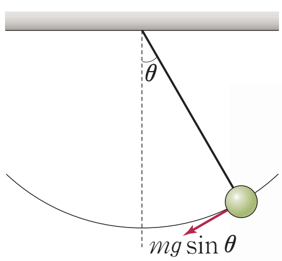
02 삼각함수의 극한

5 오른쪽 그림과 같이 질량이 m kg인 시계추와 지면에 수직인 선분과 이루는 각의 크기가 θ일 때, 추가 움직이는 방향으로 받는 힘의 크기 $f(\theta)$는

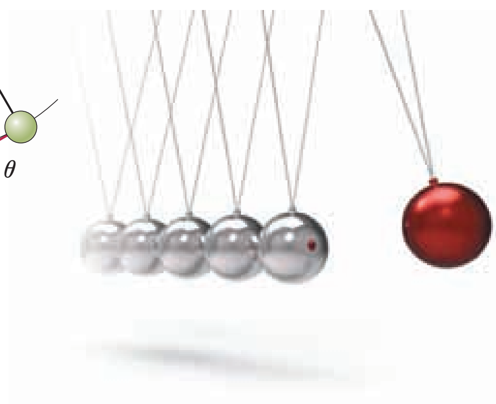
$$f(\theta)=mg\sin\theta$$

이다. 이때 $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$의 값을 구하여라.

(단, 시계추의 질량 m은 500 g이고, 중력가속도 g는 10 m/s^{2}이다.)



03 사인함수와 코사인함수의 미분



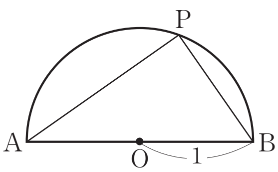
[해답 p. 207]

중단원 실력

1 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}$, $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때, $\cos(\alpha-\beta)$의 값을 구하여라.

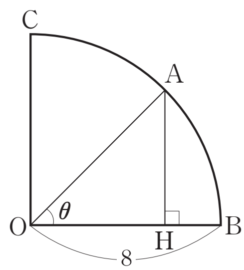
01 삼각함수의 덧셈정리

2 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 반원에서 호 AB 위의 점 P에 대하여 $2\overline{AP}+3\overline{BP}$의 최댓값을 구하여라.



01 삼각함수의 덧셈정리

3 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 8인 사분원 위의 한 점 A에서 반지름 OB에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle AOB=\theta$라고 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{BH}}{\theta^2}$의 값을 구하여라.



02 삼각함수의 극한

4 다음 중에서 함수 $f(x)=\cos x$에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 찾아라.

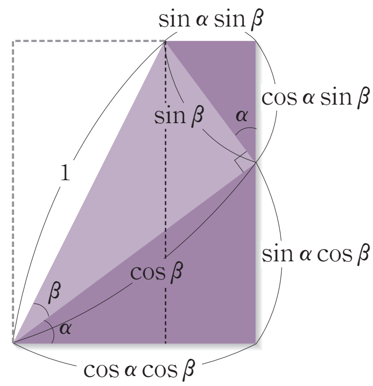
ㄱ $\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}=1$　　ㄴ $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$　　ㄷ $f'\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-f(x)$

03 사인함수와 코사인함수의 미분

수행 과제

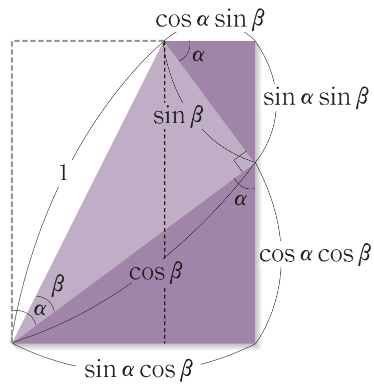
종이접기로 알 수 있는 삼각함수의 덧셈정리

종이접기를 이용하면 삼각함수의 덧셈정리를 간단히 얻을 수 있다. A4 용지 한 장을 준비하여 오른쪽 그림과 같이 A4 용지의 왼쪽 위 끝을 용지의 오른쪽 변에 닿도록 접는다. 이때 접힌 부분의 길이를 1, 용지의 왼쪽 아래의 두 각을 α, β라고 하자. 그러면 다음과 같은 공식을 얻을 수 있다.

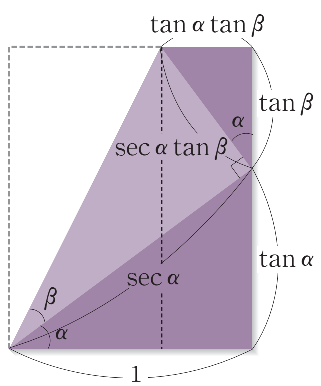


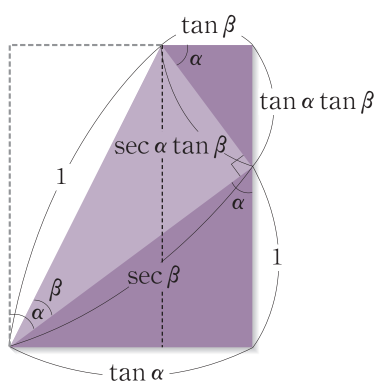
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

| 과 제 | **1** 오른쪽 그림과 같이 A4 용지를 접은 후 두 각 α, β를 표시하면 $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$에 대한 공식을 얻을 수 있음을 설명하여라.



| 과 제 | **2** 다음 그림과 같이 A4 용지를 접은 후 두 각 α, β를 표시하면 각각 $\tan(\alpha+\beta)$, $\tan(\alpha-\beta)$에 대한 공식을 얻을 수 있음을 설명하여라.





대단원 학습 내용 정리

1 일반각과 호도법

(1) 일반각: $\theta=360^\circ\times n+\alpha^\circ$ (n은 정수, $0^\circ\le\alpha^\circ<360^\circ$)

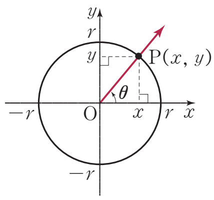
(2) 호도법: 1라디안$=\dfrac{180^\circ}{\pi}$, $1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$라디안

2 삼각함수

(1) $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$, $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$, $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$

$\csc\theta=\dfrac{r}{y}$, $\sec\theta=\dfrac{r}{x}$, $\cot\theta=\dfrac{x}{y}$

(2) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$



3 삼각함수의 그래프와 성질

(1) 삼각함수의 그래프

삼각함수	정의역	치역	주기	비고
$y=\sin x$	모든 실수	$\{y\mid -1\le y\le 1\}$	2π	원점 대칭
$y=\cos x$	모든 실수	$\{y\mid -1\le y\le 1\}$	2π	y축 대칭
$y=\tan x$	$x\ne n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 인 실수	모든 실수	π	원점 대칭

(2) 여러 가지 각에 대한 삼각함수

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
$2n\pi+\theta$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
$-\theta$	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$-\tan\theta$
$\pi+\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$\tan\theta$
$\pi-\theta$	$\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\tan\theta$
$\dfrac{\pi}{2}+\theta$	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	$-\cot\theta$
$\dfrac{\pi}{2}-\theta$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$\cot\theta$

4 삼각함수의 활용

(1) 방정식 $\sin\theta=a$를 만족시키는 θ의 값은 함수 $y=\sin\theta$와 직선 $y=a$와의 교점을 이용하여 구하거나 단위원과 직선 $y=a$와의 교점을 이용하여 구한다.

(2) 부등식 $\sin\theta>a$를 만족시키는 θ값의 범위는 함수 $y=\sin\theta$와 직선 $y=a$의 교점을 이용하여 구하거나, 단위원과 직선 $y=a$와의 교점을 이용하여 구한다.

5 삼각함수의 덧셈정리

(1) 삼각함수의 덧셈정리

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

(2) 삼각함수의 합성

$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

$\left(\text{단, } \cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

6 삼각함수의 극한

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (단, x는 라디안)

7 사인함수와 코사인함수의 미분

(1) $y=\sin x$이면 $y'=\cos x$

(2) $y=\cos x$이면 $y'=-\sin x$

용어와 기호 시초선, 동경, 일반각, 호도법, 라디안, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수, 삼각함수, 주기, 주기함수, 덧셈정리, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\csc\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$

대/단/원 평가 문제

선택형

1 다음 중에서 동경이 일치하는 각끼리 짝지은 것은?

① $20°$, $750°$ ② $\frac{2}{3}\pi$, $135°$
③ $\frac{3}{2}\pi$, $-90°$ ④ $-\frac{4}{3}\pi$, $240°$
⑤ $\frac{5}{4}\pi$, $420°$

2 원점 O와 점 P$(-3,\ 4)$를 지나는 동경 OP가 나타내는 각을 θ라고 할 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은?

① $-\frac{4}{5}$ ② $-\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{7}{5}$

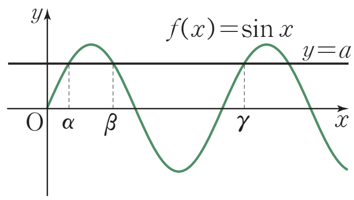
3 함수 $f(x)=3\sin(2x-3)+2$의 주기와 최댓값, 최솟값을 각각 p, q, r라고 할 때, pqr의 값은?

① -5π ② -3π ③ $-\pi$
④ 0 ⑤ π

4 이차방정식 $3x^2-5x+2=0$의 두 근이 $\tan\alpha$, $\tan\beta$일 때, $\tan(\alpha+\beta)$의 값은?

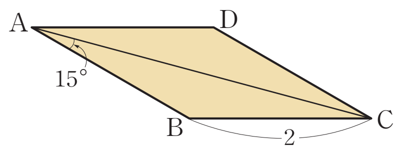
① 0 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

5 함수 $f(x)=\sin x\,(x>0)$의 그래프와 직선 $y=a\,(0<a<1)$의 교점의 x좌표를 작은 것부터 차례로 α, β, γ라고 할 때, $f(\alpha+\beta+\gamma)$의 값은?



① $-2a$ ② $-a$ ③ 0
④ a ⑤ $2a$

6 한 변의 길이가 2인 마름모 ABCD에서 $\angle BAC=15°$일 때, 마름모 ABCD의 넓이는?



① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

7 $\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{1}{2}$일 때, $\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{10}}{2}$
④ $\frac{\sqrt{13}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{15}}{2}$

8 θ가 제2사분면의 각이고 $\cos\theta=-\frac{5}{13}$일 때, $\csc\theta+\cot\theta$의 값은?

① $-\frac{3}{4}$　② $-\frac{2}{3}$　③ 0

④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{3}{4}$

9 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$의 값은?

① $-\frac{2}{3}$　② $-\frac{1}{2}$　③ 1

④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{1}{2}$

10 등식 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{ax+b}=3$이 성립하도록 하는 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -1　② 0　③ 1

④ 2　⑤ 3

11 함수 $f(x)=x\sin x$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi)}{h}$의 값은?

① -2π　② $-\pi$　③ 0

④ π　⑤ 2π

서답형

12 호의 길이가 2π cm이고, 넓이가 6π cm^{2}인 부채꼴의 반지름의 길이와 중심각의 크기를 각각 구하여라.

13 부등식 $\sin x>\frac{1}{\sqrt{2}}$을 만족시키는 x값의 범위를 구하여라. (단, $0\le x<2\pi$)

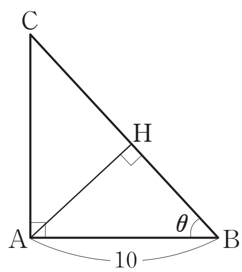
|서|술|형|

14 함수 $f(x)=\tan x$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $g\left(\frac{1}{2}\right)+g\left(\frac{1}{3}\right)=\theta$라고 할 때, $\sin\theta$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

$\left(\text{단, } 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

|서|술|형|

15 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=10$인 직각삼각형 ABC가 있다. 꼭짓점 A에서 빗변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle ABC=\theta$라고 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{CH}}{\theta^2}$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.



Real Life

수 학 실 생 활

시계와 각

인류 최초의 시계는 땅에 막대를 꽂아 놓고 시간을 측정했던 그노몬(gnomon)이다. 이 시계는 수직으로 세운 막대 때문에 생기는 그림자의 길이로 낮 동안의 시간을 나타내도록 되어 있다. 기원전 8세기경부터는 좀더 정밀한 장치가 사용되었는데, 최초의 해시계는 고대 이집트에서 만들어졌다고 한다.

해시계는 태양이 가장 높이 떠올랐을 때를 정오로 하여 태양의 위치에 따라 시간을 알려 준다. 그러나 실제 정오와 태양이 가장 높이 떠올랐을 때의 시간은 계절에 따라 약간씩 다르다. 어떤 날은 하루가 24시간보다 길고 또 어떤 날은 24시간보다 짧다. 그래서 해시계는 각을 측정하여 최대 분 단위까지만 알 수 있다. 왜냐하면 실제로 지구에 설치한 해시계는 태양이 움직이는 궤도에 따라 변하는 막대의 각을 측정하는 데, 1분에 단지 $\left(\frac{1}{4}\right)^\circ$ 정도가 변할 뿐이고, 해시계에서 $\left(\frac{1}{4}\right)^\circ$가 변하는 것을 알아낸다는 것은 어려운 일이기 때문이다.

오늘날 지구 상에는 각양각색의 시계가 있다. 그런데 시계에는 변하지 않는 공통점이 있다. 그것은 지구가 태양의 주위를 하루에 한 번 회전한다는 사실에서 360°를 12등분 하여 각 시간 간격이 30°라는 것과 시곗바늘이 오른쪽에서 왼쪽으로 회전한다는 것이다.

그런데 시곗바늘이 오른쪽에서 왼쪽으로 회전하게 된 이유는 무엇일까?

현재 우리가 살고 있는 지구의 북반구에서 볼 때, 태양은 동쪽에서 떠서 북반구의 남쪽 하늘을 지나 서쪽으로 진다. 맑은 날 긴 막대를 땅에 세워 놓고 그림자를 살펴보면 막대의 그림자가 움직이는 방향이 시곗바늘이 움직이는 방향과 같다는 것을 알 수 있다. 만일 우리가 지구의 남반구에 있다면 태양이 동쪽에서 떠서 남반구의 북쪽 하늘을 지나 서쪽으로 지기 때문에 태양의 그림자가 북반구의 반대 방향으로 움직이는 것을 보게 될 것이다. 그런데 인류의 문명이 북반구에서 시작되어 북반구를 기준으로 하였기 때문에 시곗바늘이 오른쪽에서 왼쪽으로 회전하게 된 것이다.

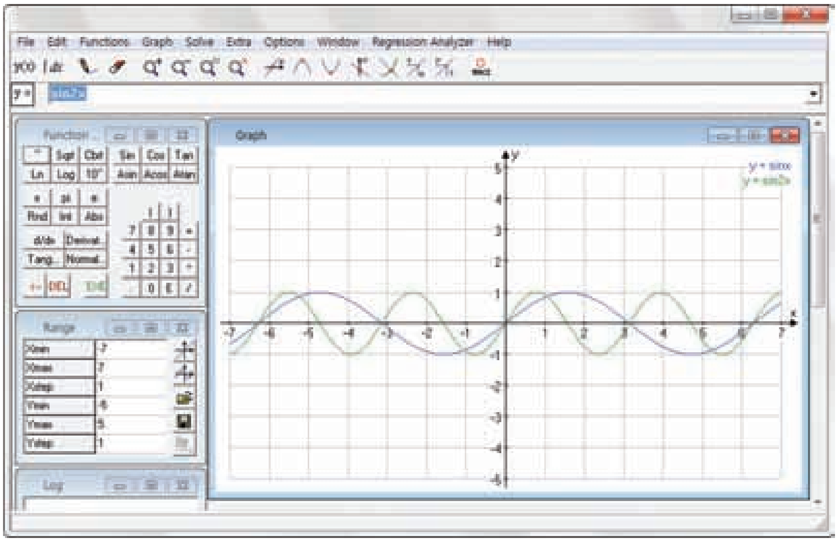
컴퓨터를 이용하여 삼각함수의 그래프 그리기

함수의 그래프를 그리는 컴퓨터 프로그램을 이용하여 삼각함수의 그래프를 그려 보자.

두 삼각함수 $y=\sin x$, $y=\sin 2x$의 그래프를 한 평면 위에 그린 다음 주기를 구하여 보자.
(단, $\pi=3.14$로 계산한다.)

① 수식 입력 창에 'sin x'를 입력한 후 를 누르면 $y=\sin x$의 그래프가 그려진다.

② 수식 입력 창에 적힌 함수의 식을 지우고 'sin $2x$'를 입력한 후 를 누르면 $y=\sin 2x$의 그래프가 추가되어 다음 그림과 같이 두 함수의 그래프가 그려진다.



③ 따라서 $y=\sin x$의 주기는 2π이고 $y=\sin 2x$의 주기는 π이다.

| 과 제 | 컴퓨터 프로그램을 이용하여 다음 각 함수의 그래프를 그리고 최댓값과 최솟값, 주기를 구하여라. (단, $\pi=3.14$로 계산한다.)

(1) $y=2\sin x$

(2) $y=\sin(x+\pi)$

(3) $y=\cos x+1$

(4) $y=2\cos(x+\pi)$

(5) $y=\tan 2x$

(6) $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

M+ Engineering

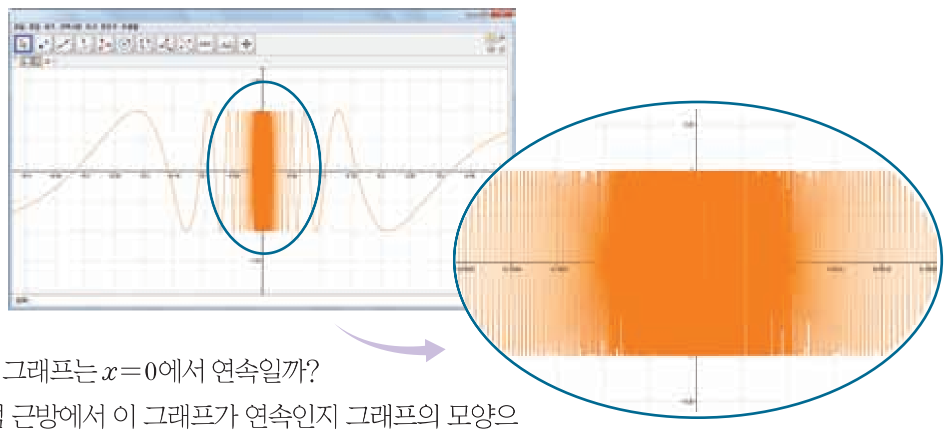
수 학 + 공 학

삼각함수의 그래프와 함수의 극한

컴퓨터를 이용하면 생각하기 어려운 삼각함수의 그래프의 모양을 쉽게 이해할 수 있다.

1 \ $f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ 의 그래프

(1) 이 그래프의 원점 근방의 모양을 상상하기는 쉽지 않지만 컴퓨터를 이용하면 다음 그림과 같이 원점 근방에서 매우 조밀하게 그려진 그래프를 확인할 수 있다.

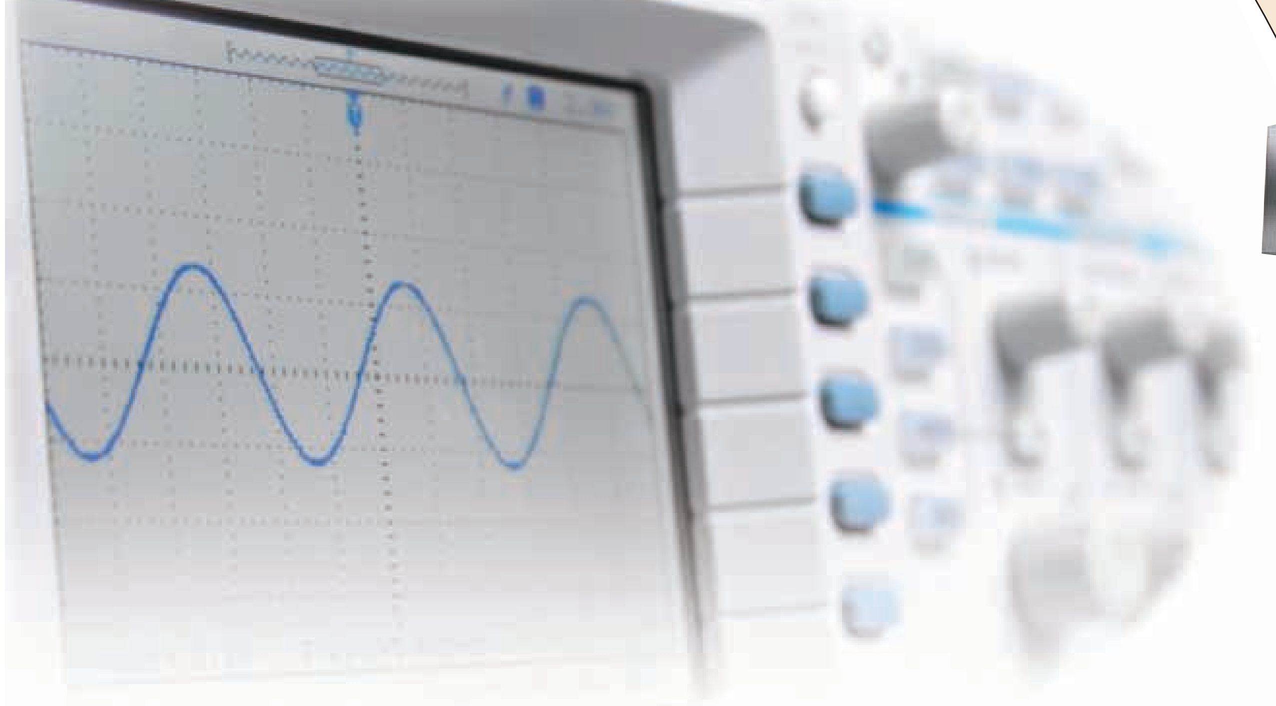


(2) 이 그래프는 $x=0$에서 연속일까?

원점 근방에서 이 그래프가 연속인지 그래프의 모양으로는 쉽게 확인하기 어렵다. 그러나

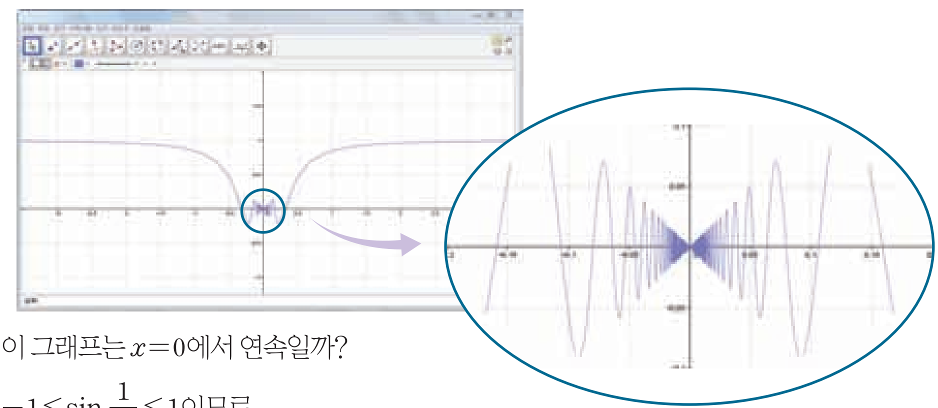
$$\lim_{x\to 0+}\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to\infty}\sin t,\ \lim_{x\to 0-}\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to-\infty}\sin t$$

이므로 $\sin\frac{1}{x}$의 좌극한과 우극한이 모두 진동하여 극한값이 존재하지 않음을 알 수 있다. 즉, $x=0$에서 불연속이다.



2 \ $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ 의 그래프

(1) 한편 $y=x\sin\frac{1}{x}$의 그래프를 컴퓨터를 이용하여 그리면 다음 그림과 같이 x의 값이 한없이 커지면 함숫값이 1에 가까워지고, x의 값이 0에 가까워지면 함숫값이 점점 작아지면서 조밀하게 그려지는 것을 확인할 수 있다.



(2) 이 그래프는 $x=0$에서 연속일까?

$-1\leq\sin\frac{1}{x}\leq 1$이므로

$-|x|\leq x\sin\frac{1}{x}\leq|x|$

즉, $\lim_{x\to 0}(-|x|)\leq\lim_{x\to 0}f(x)\leq\lim_{x\to 0}|x|$가 성립한다.

따라서 $\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$, 즉 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$이므로 $x=0$에서 연속임을 확인할 수 있다.

(3) 왜 직선 $y=1$이 점근선일까?

$\frac{1}{x}=t$라고 하면 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$

따라서 $\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$이므로 직선 $y=1$이 점근선임을 확인할 수 있다.

곡선 모양의 도로는 급격한 운전대 조작을

하지 않아도 되는 형태이다.

미분법

|준|비|학|습|

미적분 I 도함수

1 도함수의 정의를 이용하여 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $f(x)=2x+1$ (2) $f(x)=x^2+x$

미적분 II 지수 · 로그함수와 삼각함수의 미분

2 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=3^x$ (2) $y=\log_3 x$

(3) $y=2\sin x$ (4) $y=3\cos x$

미적분 I 함수의 그래프의 개형

3 다음 함수의 그래프의 개형을 그려라.

(1) $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$ (2) $f(x)=2x^4-4x^2+1$

1 여러 가지 미분법

움직이는 동안은 같은 소리도 다르게 들린다.

빠르게 다가왔다가 멀어지는 소방차의 사이렌 소리가 다르다는 것을 느껴 본 적이 있을 것이다. 실제로 빠르게 다가오는 소방차의 사이렌 소리는 높은 음으로 들리고, 멀어지는 소방차의 사이렌 소리는 낮은 음으로 들린다. 소리는 파동의 형태로 우리의 귀에 전달되는데, 소리를 내는 소방차의 사이렌이나 소리를 듣는 사람이 이동하면 소리의 파동 모양이 변화된 형태로 우리의 귀로 전달되기 때문이다.

즉, 소리를 내는 물체와 듣는 사람이 가까워지면 소리의 파장이 짧아져 높은 음의 소리로 들리고, 소리를 내는 물체로부터 듣는 사람이 멀어지면 소리의 파장이 길어져 낮은 음의 소리로 들린다.

이러한 현상을 '도플러 효과'라고 하는데, 도플러 효과는 소리를 내는 물체와 듣는 사람이 접근하는 속도가 클수록 커진다고 한다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자.

111쪽

빠르게 지나가는 소방차의 사이렌 소리의 진동수는 어떻게 변할까?

01 함수의 몫의 미분법

● 함수의 몫을 미분할 수 있다.

함수의 몫은 어떻게 미분하는가?

탐구 활동

기체의 부피는 압력이 낮을수록 증가한다. 즉, 기온이 일정할 때 압력을 x Pa, 기체의 부피를 y m^{3}라고 하면 $y=\dfrac{c}{x}$ (단, c는 상수)와 같이 나타낼 수 있다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. x의 증분 $\varDelta x$에 대한 y의 증분 $\varDelta y$를 $\varDelta x$의 식으로 나타내어 보자.

2. $\varDelta x \longrightarrow 0$일 때, $\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}$의 값은 어떤 값에 가까워지는지 말하여 보자.

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$의 도함수를 구하여 보자.

x의 증분 $\varDelta x$에 대한 y의 증분을 $\varDelta y$라고 하면

$$\begin{aligned}\varDelta y&=\frac{f(x+\varDelta x)}{g(x+\varDelta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x+\varDelta x)g(x)-f(x)g(x+\varDelta x)}{g(x+\varDelta x)g(x)}\\&=\frac{f(x+\varDelta x)g(x)-f(x)g(x)-f(x)g(x+\varDelta x)+f(x)g(x)}{g(x+\varDelta x)g(x)}\\&=\frac{\{f(x+\varDelta x)-f(x)\}g(x)-f(x)\{g(x+\varDelta x)-g(x)\}}{g(x+\varDelta x)g(x)}\end{aligned}$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}y'&=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\\&=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\dfrac{f(x+\varDelta x)-f(x)}{\varDelta x}\cdot g(x)-f(x)\cdot\dfrac{g(x+\varDelta x)-g(x)}{\varDelta x}}{g(x+\varDelta x)g(x)}\\&=\frac{\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{f(x+\varDelta x)-f(x)}{\varDelta x}\cdot g(x)-f(x)\cdot\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{g(x+\varDelta x)-g(x)}{\varDelta x}}{\displaystyle g(x)\lim_{\varDelta x\to 0}g(x+\varDelta x)}\\&=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}\end{aligned}$$

● 함수 $g(x)$는 미분가능하므로 연속이다.
$\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0}g(x+\varDelta x)=g(x)$

특히 $f(x)=1$일 때 $f'(x)=0$이므로 $y=\dfrac{1}{g(x)}$의 도함수는 다음과 같다.

$$y'=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

함수의 몫의 미분법

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ $(g(x)\neq 0)$에 대하여

(1) $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

(2) $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}'=-\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

예제 01 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$ (2) $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$

풀이 (1) $y'=\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)'=-\dfrac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=-\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$

(2) $y'=\left(\dfrac{x-1}{x^2+1}\right)'=\dfrac{(x-1)'(x^2+1)-(x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{1\cdot(x^2+1)-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$

답 (1) $y'=-\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$ (2) $y'=\dfrac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$

문제 1 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\dfrac{1}{x^2}$ (2) $y=\dfrac{1}{x^3+x}$

(3) $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ (4) $y=\dfrac{x^2}{x^2+2x+1}$

함수의 몫의 미분법을 이용하여 n이 음의 정수일 때, 함수 $y=x^n$의 도함수를 구하여 보자.

미적분 I 도함수
$y=x^n$ (n은 양의 정수)이면
$y'=nx^{n-1}$

$n=-m$ (m은 양의 정수)이라고 하면 $y=x^n=x^{-m}=\dfrac{1}{x^m}$이므로

$$y'=\left(\frac{1}{x^m}\right)'=-\frac{(x^m)'}{(x^m)^2}=-\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}}=-mx^{-m-1}=nx^{n-1}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

$n=0$이면 $y=x^0=1$이고 $y'=0=0\cdot x^{0-1}$으로 표현할 수 있다.

함수 $y=x^n$ (n은 정수)의 도함수

n이 정수일 때, $y=x^n$이면 $y'=nx^{n-1}$

보기 (1) $(x^{-3})'=-3x^{-3-1}=-3x^{-4}=-\dfrac{3}{x^4}$

(2) $\left(\dfrac{1}{x^6}\right)'=(x^{-6})'=-6x^{-6-1}=-\dfrac{6}{x^7}$

문제 2 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=2x^{-2}$ (2) $y=\dfrac{3}{x^5}$ (3) $y=\dfrac{x^4+x^2+1}{x^3}$

함수의 몫의 미분법을 이용하여 삼각함수의 도함수를 구하여 보자.

예제 02 함수 $y=\tan x$의 도함수를 구하여라.

풀이 $y'=(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$

답 $y'=\sec^2 x$

문제 3 다음 등식이 성립함을 보여라.

(1) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$

(2) $(\sec x)'=\sec x\tan x$

(3) $(\cot x)'=-\csc^2 x$

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

소방차가 사이렌을 울리며 v m/s의 속도로 도로를 달리고 있다. 소방차가 다가올 때 사람이 듣는 사이렌 소리의 진동수를 F_1 Hz, 소방차가 멀어질 때 사람이 듣는 사이렌 소리의 진동수를 F_2 Hz라고 하면

$$F_1=\frac{132400}{340-v},\ F_2=\frac{132400}{340+v}$$

이 성립한다고 한다. 이 소방차의 속도에 대한 사이렌 소리의 진동수의 변화율 $\dfrac{dF_1}{dv}$, $\dfrac{dF_2}{dv}$를 구하여라.

02 합성함수의 미분법

● 합성함수를 미분할 수 있다.

합성함수는 어떻게 미분하는가?

탐구 활동

두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=2x+1$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 합성함수 $y=f(g(x))$를 구하고, 도함수 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하여 보자.

2. $y=f(u)$, $u=g(x)$라고 할 때, $\dfrac{dy}{du}$와 $\dfrac{du}{dx}$를 구하여 보자.

3. **2**의 결과를 이용하여 $\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$를 계산하고, 이를 x에 대한 식으로 나타내어 보자.

4. $\dfrac{dy}{dx}$와 $\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$를 비교하여 보자.

미분가능한 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수를 구하여 보자.

$u=g(x)$에서 x의 증분 Δx에 대한 u의 증분을 Δu라 하고, $y=f(u)$에서 u의 증분 Δu에 대한 y의 증분을 Δy라고 하면

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\ (\text{단, } \Delta u\neq 0)$$

이다. 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능하므로

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{dy}{du},\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{du}{dx}$$

이다. 그런데 미분가능한 함수 $u=g(x)$는 연속이므로 $\Delta x \to 0$이면 $\Delta u \to 0$이다.

따라서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\\&=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

함수 $u=g(x)$는 연속이므로
$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u$
$=\lim_{\Delta x\to 0}\{g(x+\Delta x)-g(x)\}$
$=g(x)-g(x)=0$

여기서 $\dfrac{dy}{du}=f'(u)$, $\dfrac{du}{dx}=g'(x)$이고, $u=g(x)$이므로

$$y'=f'(u)g'(x)=f'(g(x))g'(x)$$

이다. 이상을 정리하면 다음과 같다.

합성함수의 미분법을 연쇄법칙(chain rule)이라고 부르기도 한다.

합성함수의 미분법

미분가능한 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$도 미분가능하며, 그 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \text{ 또는 } y'=f'(g(x))g'(x)$$

예제 01

합성함수의 미분법을 이용하여 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=(x^2+7)^5$

(2) $y=\dfrac{1}{(2x+1)^3}$

풀이 (1) $u=x^2+7$로 놓으면 $y=u^5$이므로 $\dfrac{dy}{du}=5u^4$, $\dfrac{du}{dx}=2x$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=5u^4\cdot 2x=10x(x^2+7)^4$$

(2) $u=2x+1$로 놓으면 $y=u^{-3}$이므로 $\dfrac{dy}{du}=-3u^{-4}=-\dfrac{3}{u^4}$, $\dfrac{du}{dx}=2$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=-\frac{3}{u^4}\cdot 2=-\frac{6}{(2x+1)^4}$$

답 (1) $y'=10x(x^2+7)^4$ (2) $y'=-\dfrac{6}{(2x+1)^4}$

문제 1

합성함수의 미분법을 이용하여 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=(5-x)^3$

(2) $y=(x^2+3x)^5$

(3) $y=\dfrac{1}{(4-x)^2}$

(4) $y=\dfrac{1}{(x^2-x+1)^3}$

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립함을 설명하여 보자.

(1) $\{f(ax+b)\}'=af'(ax+b)$ (단, a, b는 실수)

(2) $y=\{f(x)\}^n$일 때, $y'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$ (단, n은 정수)

03 역함수의 미분법

● 역함수를 미분할 수 있다.

역함수는 어떻게 미분하는가?

생각 열기

탐구 활동

일차함수 $f(x)=ax+b$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$를 구하여 보자.
2. 함수 $f(x)$와 $f^{-1}(x)$의 도함수를 각각 구하여 보자.
3. $f(x)$의 도함수와 $f^{-1}(x)$의 도함수 사이에는 어떤 관계가 있는지 말하여 보자.

미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하고 미분가능할 때, $y=f^{-1}(x)$의 도함수를 구하여 보자.

$x=f(y)$이므로 이 함수의 도함수는 $\dfrac{dx}{dy}$이다.

함수 $y=f^{-1}(x)$에서 x의 증분 Δx에 대한 y의 증분을 Δy라고 하면

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}} \quad (\text{단, } \Delta y\neq 0)$$

이다. 그런데 $\Delta x \longrightarrow 0$이면 $\Delta y \longrightarrow 0$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}$$

$$=\frac{1}{\displaystyle\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

이 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

역함수의 미분법

함수 $f(x)$가 미분가능하고, 그 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하고 미분가능할 때, $y=f^{-1}(x)$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

예제 01 역함수의 미분법을 이용하여 함수 $y=\sqrt{x}$를 미분하여라.

풀이 $y=\sqrt{x}$에서 $x=y^2$이므로 $\frac{dx}{dy}=2y$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

답 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

문제 1 역함수의 미분법을 이용하여 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\sqrt[3]{x}$ (2) $y=\sqrt[4]{3x-6}$

정수 n에 대하여 $y=x^n$의 도함수는 $y'=nx^{n-1}$임을 알고 있다. 이제 r가 유리수일 때, 함수 $y=x^r$의 도함수를 구하여 보자.

n이 0이 아닌 정수일 때, $y=x^{\frac{1}{n}}$의 양변에 n제곱하면 $x=y^n$이고, $\frac{dx}{dy}=ny^{n-1}$이므로 역함수의 미분법에 의하여

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{ny^{n-1}}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

이다.

한편 $r=\frac{m}{n}$ (m, n은 정수, $n\neq0$)으로 놓으면 $y=x^r=x^{\frac{m}{n}}$이므로 합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}x^r=\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{n}})^m=m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1}\cdot(x^{\frac{1}{n}})'$$
$$=mx^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}=rx^{r-1}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

함수 $y=x^r$ (r는 유리수)의 도함수

r가 유리수일 때, $y=x^r$이면 $y'=rx^{r-1}$

보기 (1) $(x\sqrt{x})'=(x^{\frac{3}{2}})'=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$

(2) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)'=(x^{-\frac{2}{3}})'=-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1}=-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$

문제 2 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=x^2\sqrt{x}$ (2) $y=\sqrt[4]{x^3}$ (3) $y=\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$

예제 02 함수 $y=\sqrt[3]{4-x^3}$의 도함수를 구하여라.

풀이 $y'=(\sqrt[3]{4-x^3})'=\{(4-x^3)^{\frac{1}{3}}\}'=\frac{1}{3}(4-x^3)^{\frac{1}{3}-1}\cdot(4-x^3)'$

$=\frac{1}{3}(4-x^3)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-3x^2)=-\frac{x^2}{\sqrt[3]{(4-x^3)^2}}$

답 $y'=-\frac{x^2}{\sqrt[3]{(4-x^3)^2}}$

문제 3 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=\sqrt[3]{(2x+1)^5}$ (2) $y=\sqrt{2x-x^2}$

사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

윤아와 승현이 중 누가 답을 맞혔는지 말하고, 그 이유를 설명하여 보자.

복잡한 함수는 어떻게 미분하는가?

몫의 미분법, 합성함수의 미분법 등을 이용하면 복잡한 함수의 도함수를 구할 수 있다. 먼저 지수함수와 로그함수가 포함된 함수의 도함수를 구하여 보자.

예제 03 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\dfrac{e^x}{e^x-1}$ (2) $y=2^{3x+2}$

풀이 (1) $y'=\dfrac{(e^x)'(e^x-1)-e^x(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}=\dfrac{e^x(e^x-1)-e^x\cdot e^x}{(e^x-1)^2}=\dfrac{-e^x}{(e^x-1)^2}$

(2) $u=3x+2$로 놓으면 $y=2^u$

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=(2^u\ln 2)\cdot 3=3\cdot 2^{3x+2}\ln 2$

답 (1) $y'=\dfrac{-e^x}{(e^x-1)^2}$ (2) $y'=3\cdot 2^{3x+2}\ln 2$

문제 4 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=e^{x^2+x+1}$ (2) $y=\dfrac{e^x}{x}$

(3) $y=3^{-2x+1}$ (4) $y=\dfrac{3^{2x}}{x}$

예제 04 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\dfrac{\ln x}{\ln x+1}$ (2) $y=\log_3(x^2+1)$

$(\log_a f(x))'=\dfrac{f'(x)}{f(x)\ln a}$

풀이 (1) $y'=\dfrac{(\ln x)'(\ln x+1)-(\ln x)(\ln x+1)'}{(\ln x+1)^2}=\dfrac{\dfrac{\ln x+1}{x}-\dfrac{\ln x}{x}}{(\ln x+1)^2}=\dfrac{1}{x(\ln x+1)^2}$

(2) $u=x^2+1$로 놓으면 $y=\log_3 u$

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{u\ln 3}\cdot 2x=\dfrac{2x}{(x^2+1)\ln 3}$

답 (1) $y'=\dfrac{1}{x(\ln x+1)^2}$ (2) $y'=\dfrac{2x}{(x^2+1)\ln 3}$

문제 5 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\dfrac{2\ln x}{x}$ (2) $y=\ln 3x$

(3) $y=\log_2(5x+3)$ (4) $y=\dfrac{1}{\log_2 3x}$

이제 절댓값 기호가 포함된 로그함수의 도함수를 구하여 보자.

(i) $x>0$일 때, $y=\ln|x|=\ln x$이므로

$$y'=\frac{1}{x}$$

(ii) $x<0$일 때, $y=\ln|x|=\ln(-x)$이므로

$$y'=\frac{1}{-x}\cdot(-x)'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$$

따라서 (i), (ii)에서 $y'=\dfrac{1}{x}$이다.

또한 $y=\log_a|x|\ (a>0,\ a\neq1)$의 도함수는

$$y'=\left(\frac{\ln|x|}{\ln a}\right)'=\frac{(\ln|x|)'}{\ln a}=\frac{1}{x\ln a}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

절댓값이 포함된 로그함수의 미분법

(1) $y=\ln|x|$이면 $y'=\dfrac{1}{x}$

(2) $y=\log_a|x|$이면 $y'=\dfrac{1}{x\ln a}$ (단, $a>0,\ a\neq1$)

참고 로그함수의 도함수와 합성함수의 미분법을 이용하여 함수 $y=\ln|f(x)|$의 도함수를 구하면 $y'=(\ln|f(x)|)'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$이다.

예제 05 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\ln|5x-3|$ (2) $y=\log_5|x^2-1|$

풀이 (1) $y'=(\ln|5x-3|)'=\dfrac{(5x-3)'}{5x-3}=\dfrac{5}{5x-3}$

(2) $y'=(\log_5|x^2-1|)'=\dfrac{(x^2-1)'}{(x^2-1)\ln5}=\dfrac{2x}{(x^2-1)\ln5}$

답 (1) $y'=\dfrac{5}{5x-3}$ (2) $y'=\dfrac{2x}{(x^2-1)\ln5}$

문제 6 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\ln|\cos x|$ (2) $y=\log_2|x^2-1|$

절댓값이 포함된 로그함수의 미분법을 활용하여 복잡한 함수의 도함수를 구하여 보자.

예제 06 함수 $y=\dfrac{(x-1)(x+1)^3}{(x+3)^2}$ 을 미분하여라.

풀이 양변의 절댓값에 자연로그를 취하여 정리하면

$\ln|y|=\ln|x-1|+3\ln|x+1|-2\ln|x+3|$

이고, 이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x+3}=\frac{2x^2+10x-4}{(x-1)(x+1)(x+3)}$$

$$y'=y\cdot\frac{2x^2+10x-4}{(x-1)(x+1)(x+3)}=\frac{(x+1)^2(2x^2+10x-4)}{(x+3)^3}$$

답 $y'=\dfrac{(x+1)^2(2x^2+10x-4)}{(x+3)^3}$

문제 7 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\dfrac{x(x-2)^2}{(x-1)^3}$ (2) $y=\dfrac{(x+2)^3\sqrt{x+1}}{x-1}$

이제 α가 실수일 때, 함수 $y=x^\alpha$의 도함수를 구하여 보자.

$y=x^\alpha$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|y|=\ln|x^\alpha|,\ \ln|y|=\alpha\ln|x|$$

이고, y는 x의 함수이므로 합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dx}(\ln|y|)=\frac{y'}{y},\ \frac{d}{dx}(\alpha\ln|x|)=\frac{\alpha}{x}$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{\alpha}{x},\ y'=y\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

함수 $y=x^\alpha$ (α는 실수)의 도함수

α가 실수일 때, $y=x^\alpha$이면 $y'=\alpha x^{\alpha-1}$

보기 함수 $y=x^{\sqrt{2}}$을 미분하면 $y'=(x^{\sqrt{2}})'=\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$

문제 8 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=(2x)^\pi$ (2) $y=x^{\sqrt{2}}\ln x$

삼각함수가 포함된 복잡한 함수의 도함수를 구하여 보자.

예제 07 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\dfrac{\sin x}{x}$　　(2) $y=\dfrac{2-\sin x}{2+\sin x}$

풀이 (1) $y'=\dfrac{(\sin x)'x-(\sin x)x'}{x^2}=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

(2) $y'=\dfrac{(2-\sin x)'(2+\sin x)-(2-\sin x)(2+\sin x)'}{(2+\sin x)^2}$

$=\dfrac{-\cos x(2+\sin x)-(2-\sin x)\cos x}{(2+\sin x)^2}=-\dfrac{4\cos x}{(2+\sin x)^2}$

답 (1) $y'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$　(2) $y'=-\dfrac{4\cos x}{(2+\sin x)^2}$

문제 9 다음 함수를 미분하여라.

$(\sec x)'=\sec x\tan x$

(1) $y=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$　　(2) $y=\dfrac{\sec x}{1+\sec x}$

예제 08 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\cos(3x+1)$　　(2) $y=\sin^2 3x$

풀이 (1) $u=3x+1$이라고 하면 $y=\cos u$, $\dfrac{dy}{du}=-\sin u$, $\dfrac{du}{dx}=3$이므로

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=-\sin u\cdot 3$

$=-\sin(3x+1)\cdot 3=-3\sin(3x+1)$

(2) $u=\sin 3x$라고 하면 $y=u^2$, $\dfrac{dy}{du}=2u$, $\dfrac{du}{dx}=3\cos 3x$이므로

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=2u\cdot(3\cos 3x)$

$=2\sin 3x\cdot 3\cos 3x=6\sin 3x\cos 3x$

답 (1) $y'=-3\sin(3x+1)$　(2) $y'=6\sin 3x\cos 3x$

문제 10 다음 함수를 미분하여라.

$(\csc x)'=-\csc x\cot x$
$(\cot x)'=-\csc^2 x$

(1) $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$　　(2) $y=\csc(3x+5)$

(3) $y=\cos^2(x^2+1)$　　(4) $y=\sqrt{\cot 3x}$

04 이계도함수

● 이계도함수를 구할 수 있다.

이계도함수란 무엇인가?

탐구 활동 **삼차함수 $f(x)=x^3-2x^2+5x+4$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.**

1. 함수 $f(x)$의 도함수를 구하여 보자.

2. 함수 $f'(x)$의 도함수를 구하여 보자.

미분가능한 함수 $y=f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 미분가능할 때, 다음과 같은 $f'(x)$의 도함수를 생각할 수 있다.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

이 극한을 함수 $f(x)$의 **이계도함수**라 하고, 기호로

$$f''(x),\ y'',\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

와 같이 나타낸다.

● $f''(x)=\dfrac{d}{dx}f'(x)$

보기 함수 $y=5x^4+4x^3+2x$의 도함수가 $y'=20x^3+12x^2+2$이므로 이 함수의 이계도함수는 $y''=60x^2+24x$이다.

문제 1 다음 함수의 이계도함수를 구하여라.

(1) $y=(x+1)^3$ (2) $y=\dfrac{1}{x-1}$

예제 01 다음 함수의 이계도함수를 구하여라.

(1) $y=\cos 2x$ (2) $y=\ln 3x$

풀이 (1) $y'=(-\sin 2x)\cdot 2=-2\sin 2x$이므로 $y''=-2(\cos 2x)\cdot 2=-4\cos 2x$

(2) $y'=\dfrac{1}{3x}\cdot 3=\dfrac{1}{x}$ 이므로 $y''=-\dfrac{1}{x^2}$

답 (1) $y''=-4\cos 2x$ (2) $y''=-\dfrac{1}{x^2}$

문제 2 다음 함수의 이계도함수를 구하여라.

(1) $y=\sin 2x$　　(2) $y=\ln x$

예제 02 다음 함수의 이계도함수를 구하여라.

(1) $y=x^2\ln x$　　(2) $y=e^x\cos x$

풀이 (1) $y'=2x\cdot\ln x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}=2x\ln x+x$이므로

$$y''=2\cdot\ln x+2x\cdot\frac{1}{x}+1=2\ln x+3$$

(2) $y'=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)$이므로

$$y''=(e^x)'(\cos x-\sin x)+e^x(\cos x-\sin x)'$$
$$=-2e^x\sin x$$

답 (1) $y''=2\ln x+3$　(2) $y''=-2e^x\sin x$

문제 3 다음 함수의 이계도함수를 구하여라.

(1) $y=e^x\ln x$　　(2) $y=\sin^2 x$

(3) $y=x^4e^x$　　(4) $y=x\cos x$

문제 4 함수 $y=e^{-x}\sin x$에 대하여 다음이 성립함을 증명하여라.

$$y''+2y'+2y=0$$

사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

호빈이와 연희의 대화를 보고, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f''(x)=f(x)$, $g''(x)=-g(x)$를 만족시키는 함수를 각각 찾고, 서로 비교하여 보자.

[해답 p.210]

중단원 기초

1 다음 함수를 미분하여라.

01 함수의 몫의 미분법

(1) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ (2) $y=\dfrac{1}{x^2-5x+1}$

(3) $y=\dfrac{1}{x^4}$ (4) $y=\dfrac{x^2-6}{x^3}$

2 다음 함수를 미분하여라.

02 합성함수의 미분법

(1) $y=(5x+2)^3$ (2) $y=\dfrac{2}{(x-3)^4}$

3 역함수의 미분법을 이용하여 다음 함수를 미분하여라.

03 역함수의 미분법

(1) $y=\sqrt[5]{x}$ (2) $y=\sqrt{1-3x}$

4 다음 함수를 미분하여라.

03 역함수의 미분법
$y=x^a$(a는 실수)의 도함수

(1) $y=x^3\sqrt{x}$ (2) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$

(3) $y=x^{\sqrt{3}}$ (4) $y=x^e$

5 다음 함수를 미분하여라.

03 역함수의 미분법
여러 가지 함수의 도함수

(1) $y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ (2) $y=5^{3x^2}$

(3) $y=\ln 4x$ (4) $y=(\log_2 x)^3$

(5) $y=\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$ (6) $y=\sin 3x$

6 다음 함수의 이계도함수를 구하여라.

04 이계도함수

(1) $y=\sqrt{x}$ (2) $y=x\sin x$

(3) $y=2e^{3x}$ (4) $y=\ln 2x$

중단원 기본

[해답 p.210]

수준별 학습

1 함수 $f(x)=-\frac{2x}{x^2+1}$에 대하여 $\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-f(1-x)}{x}$의 값을 구하여라.

01 함수의 몫의 미분법

2 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$f(2)=1,\ f'(2)=2$$

를 만족시킬 때, 함수 $y=x\{f(x)\}^3$의 $x=2$에서의 미분계수를 구하여라.

02 합성함수의 미분법

3 함수 $f(x)=x^2+6x+1\ (x>-3)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $g'(8)$의 값을 구하여라.

03 역함수의 미분법

4 함수 $f(x)=\tan x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$의 역함수를 $y=f^{-1}(x)$라고 할 때, $\frac{dy}{dx}$를 x에 대한 식으로 나타내어라.

03 역함수의 미분법
삼각함수의 도함수

5 $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{10x}}{10}=S$일 때, $10S$의 값을 구하여라.

03 역함수의 미분법
지수함수의 도함수

6 함수 $f(x)=xe^{ax+b}$에 대하여 $f'(0)=3,\ f''(0)=12$일 때, 두 상수 $a,\ b$의 값을 구하여라.

04 이계도함수

중단원 실력

1 함수 $f_n(x)=x^n\ (0<x<1)$에 대하여 $g(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$라고 할 때, $g'\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하여라.

01 함수의 몫의 미분법

2 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=3$, $\lim_{x\to2}\frac{g(x)-3}{x-2}=5$를 만족시킬 때, 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 $x=1$에서의 미분계수를 구하여라.

02 합성함수의 미분법

3 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $\lim_{x\to2}\frac{g(x)-1}{x-2}=3$을 만족시킨다. 이때 $f'(1)$의 값을 구하여라.

03 역함수의 미분법

4 함수 $f(x)=\ln(x^2-1)\ (x>1)$에 대하여 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f'(n)}{n}$의 값을 구하여라.

03 역함수의 미분법
로그함수의 도함수

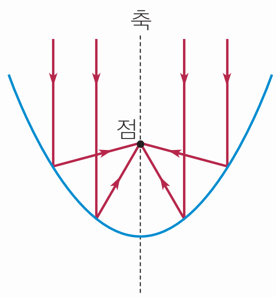
5 함수 $y=e^x\sin 2x$가 모든 실수 x에 대하여 $y''+ay'+5y=0$을 만족시킬 때, 상수 a의 값을 구하여라.

04 이계도함수

2 도함수의 활용

아르키메데스의 ‘거울 무기’

오른쪽 그림과 같이 포물선은 축과 평행하게 들어오는 빛을 반사하여 모두 한 점에 모이게 한다.

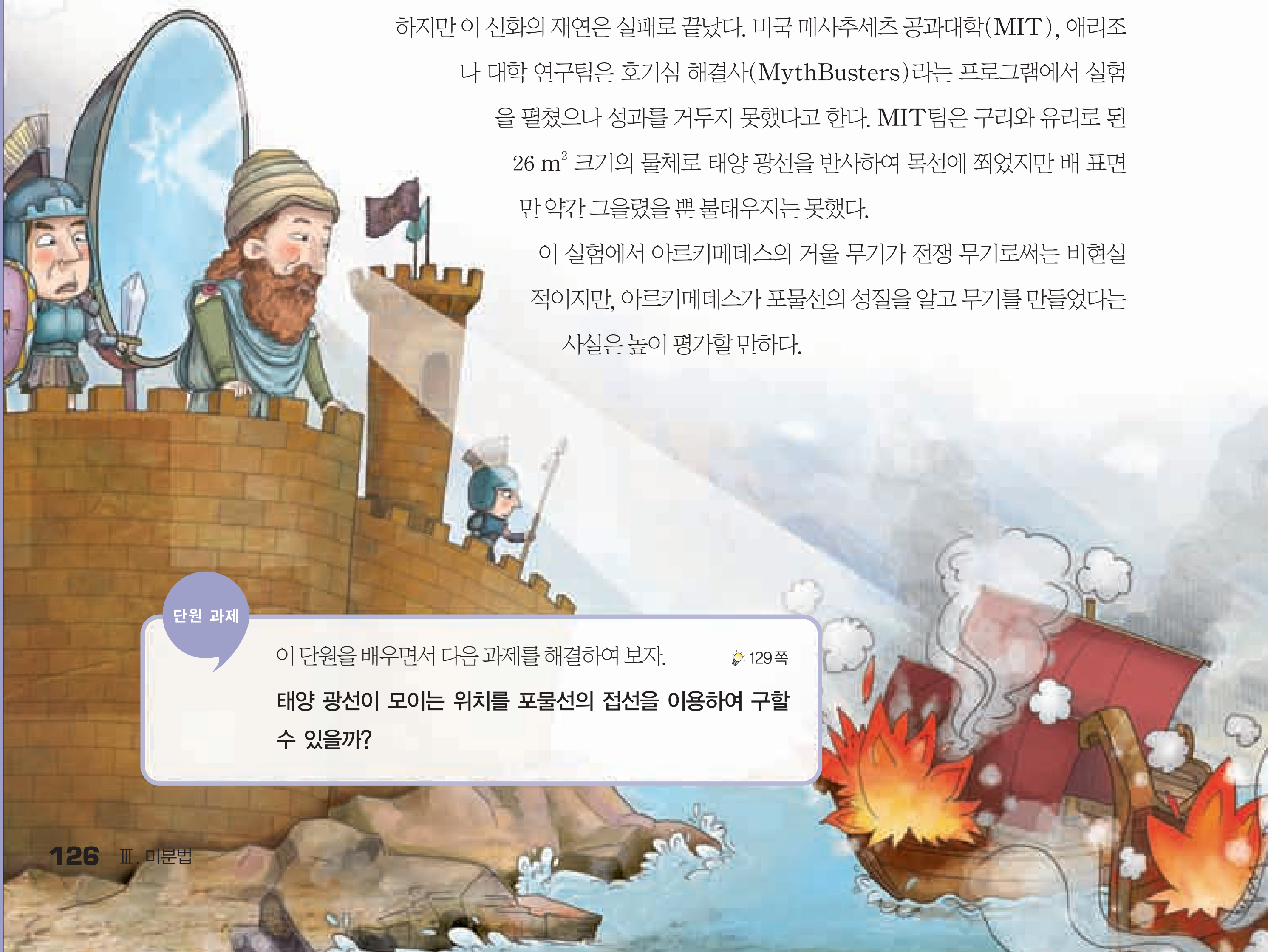


이와 같은 포물선의 성질을 이용하여 태양열 발전소는 태양열을 한 점에 모아 전기를 만들고, 접시형 안테나는 전파를 한곳에 모아 미약한 전파도 수신할 수 있게 한다.

고대 그리스의 수학자 아르키메데스(Archimedes ; B.C. 287 ~B.C. 212)는 기원전 212년 포에니 전쟁에서 로마 함대가 다가오자 커다란 포물선 모양의 거울로 신무기를 만들어 태양 광선을 모아 목선에 반사하여 불을 질러 물리쳤다고 한다.

하지만 이 신화의 재연은 실패로 끝났다. 미국 매사추세츠 공과대학(MIT), 애리조나 대학 연구팀은 호기심 해결사(MythBusters)라는 프로그램에서 실험을 펼쳤으나 성과를 거두지 못했다고 한다. MIT팀은 구리와 유리로 된 26 m^2 크기의 물체로 태양 광선을 반사하여 목선에 쬐었지만 배 표면만 약간 그을렸을 뿐 불태우지는 못했다.

이 실험에서 아르키메데스의 거울 무기가 전쟁 무기로써는 비현실적이지만, 아르키메데스가 포물선의 성질을 알고 무기를 만들었다는 사실은 높이 평가할 만하다.



단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 129쪽

태양 광선이 모이는 위치를 포물선의 접선을 이용하여 구할 수 있을까?

01

접선의 방정식

● 접선의 방정식을 구할 수 있다.

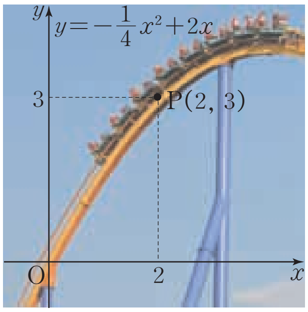
접선의 방정식은 어떻게 구하는가?

탐구 활동

다음 그림은 어느 롤러코스터의 레일의 일부를 좌표평면 위에 나타낸 것이다. 이 레일의 어떤 점을 기준으로 수평 거리가 x m 되었을 때의 높이 y m가

$$y=-\frac{1}{4}x^2+2x$$

라고 할 때, 물음에 답하여 보자.



1. 점 P(2, 3)에서의 접선의 기울기를 구하여 보자.

2. **1**을 이용하여 이 곡선 위의 점 P(2, 3)에서의 접선의 방정식을 구하여 보자.

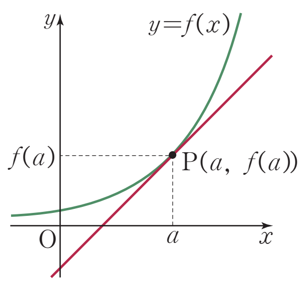
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 P에서의 접선은 점 $(a,\ f(a))$를 지나고, 기울기가 $f'(a)$인 직선이므로 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.



수학 I 직선의 방정식
점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은
$$y-y_1=m(x-x_1)$$

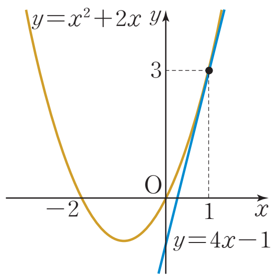
접선의 방정식

곡선 $y=f(x)$위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

예제 01

곡선 $y=x^2+2x$ 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.



풀이 $f(x)=x^2+2x$라고 하면

$f'(x)=2x+2$

점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=4$

따라서 구하는 접선은 기울기가 4이고, 점 $(1,\ 3)$을 지나므로 접선의 방정식은

$y-3=4(x-1)$

$y=4x-1$

답 $y=4x-1$

문제 1

다음 곡선 위의 주어진 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

(1) $y=x^2-3x+4 \quad (1,\ 2)$

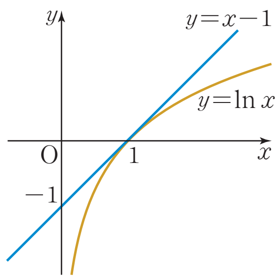
(2) $y=2x^3-4x+1 \quad (-1,\ 3)$

(3) $y=e^x-1 \quad (1,\ e-1)$

(4) $y=\cos x \quad \left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$

예제 02

곡선 $y=\ln x$에 접하고, 기울기가 1인 접선의 방정식을 구하여라.



풀이 $f(x)=\ln x$라고 하면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

기울기가 1인 접점의 좌표를 $(a,\ \ln a)$라고 하면

접선의 기울기가 1이므로

$f'(a)=\dfrac{1}{a}=1$

$a=1$

따라서 구하는 접선은 기울기가 1이고, 점 $(1,\ 0)$을 지나므로 접선의 방정식은

$y-0=1\cdot(x-1)$

$y=x-1$

답 $y=x-1$

문제 2

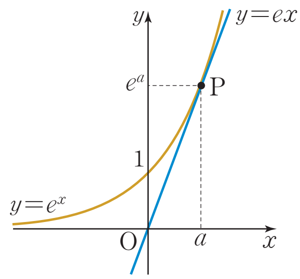
다음 곡선에 접하고, 기울기가 2인 접선의 방정식을 구하여라.

(1) $y=e^{2x}$

(2) $y=\sin 4x \quad \left(0<x<\dfrac{\pi}{4}\right)$

예제 03

원점에서 곡선 $y=e^x$에 그은 접선의 방정식을 구하여라.



풀이 $f(x)=e^x$이라고 하면

$f'(x)=e^x$

접점의 좌표를 $(a,\ e^a)$이라고 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=e^a$이므로 접선의 방정식은

$y-e^a=e^a(x-a)$ ······①

이 접선은 원점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0-e^a=e^a(0-a)$

$e^a-ae^a=0$

$e^a(1-a)=0$

$a=1$

a의 값을 ①에 대입하여 접선의 방정식을 구하면 $y=ex$

답 $y=ex$

문제 3 다음 주어진 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

(1) $y=x^2-x$ $(1,\ -1)$

(2) $y=\ln x$ $(0,\ 1)$

(3) $y=\dfrac{1}{x}$ $(2,\ 0)$

(4) $y=\sqrt{x-1}$ $(0,\ 0)$

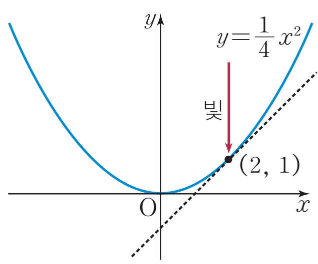
문제 4 직선 $y=2x$가 곡선 $y=m\ln x$에 접할 때, 상수 m의 값을 구하여라.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

빛이 곡선의 주어진 한 점에서 반사할 때에는, 그 점에서 곡선에 접하는 접선이 반사면의 역할을 한다. 이때 반사의 법칙에 따르면 들어오는 빛이 반사면과 이루는 각은 반사하는 빛이 반사면과 이루는 각과 같다고 한다.

포물선 $y=\dfrac{1}{4}x^2$에 빛이 y축과 평행하게 들어온다고 할 때, 포물선 위의 점 $(2,\ 1)$에서 반사되는 빛이 y축과 만나는 점의 좌표를 구하여라.



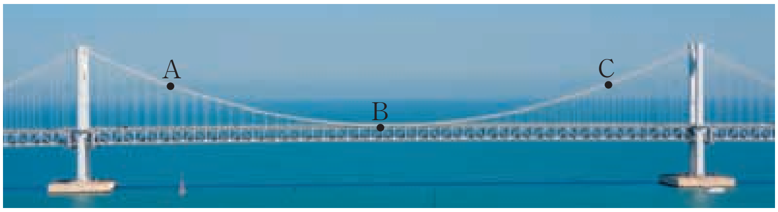
02 함수의 그래프

● 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

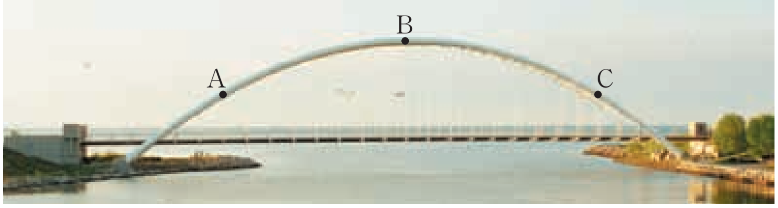
곡선의 오목과 볼록은 어떻게 알 수 있는가?

탐구 활동 다음 [사진 1]과 [사진 2]의 점 A, B, C에서 접선을 차례로 그어 보고, 물음에 답하여 보자.

[사진 1]



[사진 2]



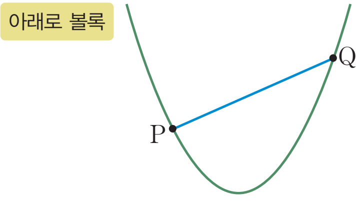
1. [사진 1]에서 점 P가 점 A에서 점 C까지 곡선을 따라 움직일 때, 점 P에서의 접선의 기울기의 변화를 말하여 보자.

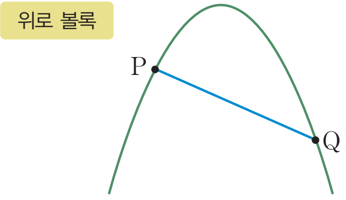
2. [사진 2]에서 점 P가 점 A에서 점 C까지 곡선을 따라 움직일 때, 점 P에서의 접선의 기울기의 변화를 말하여 보자.

위의 그림에서 곡선을 따라 접선을 차례로 그었을 때, 접선의 기울기가 증가하면 아래로 볼록하고, 접선의 기울기가 감소하면 위로 볼록함을 알 수 있다.

일반적으로 어떤 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 두 점 P, Q에 대하여 이 두 점 사이에 있는 곡선 부분이 선분 PQ보다 항상 아래쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록(또는 위로 오목)하다고 한다.

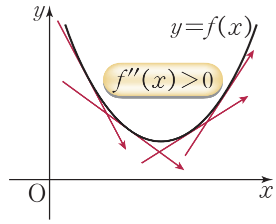
또한 두 점 P, Q 사이에 있는 곡선 부분이 선분 PQ보다 항상 위쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록(또는 아래로 오목)하다고 한다.



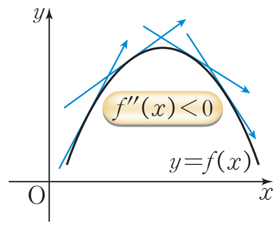


이제 이계도함수를 이용하여 곡선의 오목과 볼록을 조사하여 보자.

어떤 구간에서 $f''(x)>0$이면 이 구간에서 x가 증가할 때 $f'(x)$는 증가하므로 접선의 기울기가 증가한다. 따라서 곡선 $y=f(x)$는 오른쪽 그림과 같이 이 구간에서 아래로 볼록하다.



마찬가지로 어떤 구간에서 $f''(x)<0$이면 이 구간에서 x가 증가할 때 $f'(x)$는 감소하므로 접선의 기울기가 감소한다. 따라서 곡선 $y=f(x)$는 오른쪽 그림과 같이 이 구간에서 위로 볼록하다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

곡선의 오목과 볼록

함수 $y=f(x)$가 어떤 구간에서

(1) $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다.

(2) $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.

예제 01 다음 곡선의 오목과 볼록을 조사하여라.

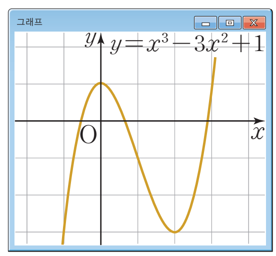
(1) $y=x^3-3x^2+1$ (2) $y=\sin x$ $(0<x<\pi)$

풀이 (1) $f(x)=x^3-3x^2+1$이라고 하면

$f'(x)=3x^2-6x$

$f''(x)=6x-6=6(x-1)$

$f''(x)$의 부호는 $x>1$일 때 $f''(x)>0$이므로 이 구간에서 아래로 볼록하고, $x<1$일 때 $f''(x)<0$이므로 이 구간에서 위로 볼록하다.

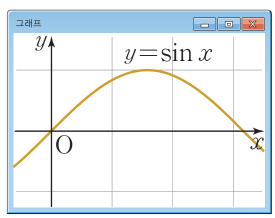


(2) $f(x)=\sin x$라고 하면

$f'(x)=\cos x$

$f''(x)=-\sin x$

$f''(x)$의 부호는 $0<x<\pi$일 때, $f''(x)<0$이므로 이 구간에서 위로 볼록하다.



답 (1) $x>1$일 때 아래로 볼록, $x<1$일 때 위로 볼록 (2) 위로 볼록

문제 1 다음 곡선의 오목과 볼록을 조사하여라.

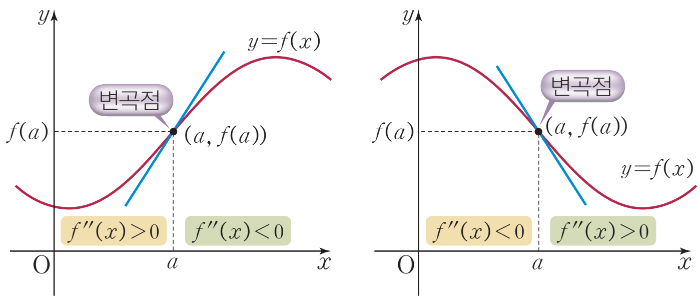
(1) $y=x^3+6x^2+3x+1$ (2) $y=xe^x$

곡선의 모양이 오목과 볼록으로 바뀌는 점에 대하여 알아보자.

곡선 $y=f(x)$ 위에 있는 점 $(a,\ f(a))$에 대하여 $x=a$의 좌우에서 곡선의 모양이 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 바뀌거나 위로 볼록에서 아래로 볼록으로 바뀔 때, 이 점 $(a,\ f(a))$를 곡선 $y=f(x)$의 **변곡점**이라고 한다.

즉, $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌는 점 $(a,\ f(a))$가 이 곡선의 변곡점이고, 이때 $f''(a)$가 존재하면 $f''(a)=0$이다.

변곡점에서 곡선에 접하는 접선은 일반적인 접선과 달리 그 곡선과 교차한다.



일반적으로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 다음과 같이 판정한다.

변곡점의 판정

이계도함수를 가지는 함수 $f(x)$에서 $f''(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(a,\ f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

예제 02 곡선 $y=x^3+3x^2+3x+2$의 변곡점을 구하여라.

풀이 $f(x)=x^3+3x^2+3x+2$라고 하면

$f'(x)=3x^2+6x+3$

$f''(x)=6x+6$

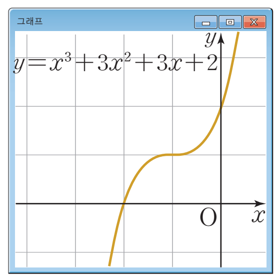
$f''(x)=0$에서 $\quad x=-1$

$x=-1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호는

$x<-1$일 때 $f''(x)<0$이고

$x>-1$일 때 $f''(x)>0$이다.

따라서 변곡점의 좌표는 $\quad(-1,\ 1)$



답 $\quad(-1,\ 1)$

문제 2 다음 곡선의 변곡점을 구하여라.

(1) $y=x^3-6x^2+12x$

(2) $y=x^4+2x^3-2x+3$

(3) $y=\ln(x^2+1)$

(4) $y=\tan x\ (0<x<2\pi)$

미적분 I **극대와 극소**
미분가능한 함수 $f(x)$에서 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(a)$의 부호를 조사하여 극대와 극소를 판정하였다.

함수 $f(x)$의 이계도함수 $f''(x)$가 존재할 때 함수의 극대와 극소를 판정하는 방법에 대하여 알아보자.

$$f'(a)=0,\ f''(a)<0\text{이면}\quad f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}$$

이때 $f''(a)<0$이므로 a에 충분히 가까운 x에 대하여 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$x<a\text{일 때, } f''(a)=\lim_{x\to a-}\frac{f'(x)}{x-a}<0\text{이므로}\quad f'(x)>0$$

$$x>a\text{일 때, } f''(a)=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{x-a}<0\text{이므로}\quad f'(x)<0$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

마찬가지 방법으로 $f'(a)=0,\ f''(a)>0$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소임을 보일 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

이계도함수를 이용한 극대와 극소의 판정

이계도함수를 가지는 함수 $y=f(x)$에서 $f'(a)=0$일 때
(1) $f''(a)>0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.
(2) $f''(a)<0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

예제 03 이계도함수를 이용하여 함수 $f(x)=x^2e^{-x}$의 극값을 구하여라.

풀이 $f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=-xe^{-x}(x-2)$이므로

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

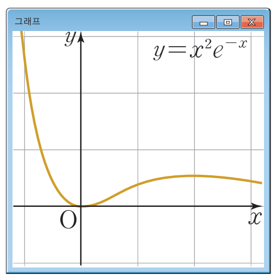
$f''(x)=2e^{-x}-2xe^{-x}-2xe^{-x}+x^2e^{-x}$

$\qquad =e^{-x}(x^2-4x+2)$

$f''(0)$과 $f''(2)$의 부호를 조사하면

$f''(0)=2>0,\ f''(2)=-2e^{-2}<0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 극소이고 극솟값은 $f(0)=0$이며, $x=2$일 때 극대이고 극댓값은 $f(2)=4e^{-2}$이다.



답 극솟값: 0, 극댓값: $4e^{-2}$

문제 3 이계도함수를 이용하여 다음 함수의 극값을 구하여라.

(1) $f(x)=2x^3-3x^2+1$ (2) $f(x)=x^2\ln x$

(3) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ (4) $f(x)=x-2\sin x\ (0\le x\le 2\pi)$

함수의 그래프의 개형은 어떻게 그리는가?

생각 열기

탐구 활동

함수 $f(x)=x^3-3x$에 대하여 이계도함수 $f''(x)$를 이용하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 함수 $y=f(x)$의 오목과 볼록을 조사하여 보자.

2. **1**을 이용하여 함수 $y=f(x)$의 변곡점을 구하여 보자.

3. 함수 $y=f(x)$의 극값을 구하여 보자.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같은 사항을 조사하고, 종합하면 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

함수 $y=f(x)$의 그래프

❶ 함수의 정의역과 치역 ❷ 대칭성과 주기
❸ 좌표축과의 교점 ❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소
❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점 ❻ $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, 점근선

예제 04

함수 $f(x)=x^3-3x^2+1$의 그래프의 개형을 그려라.

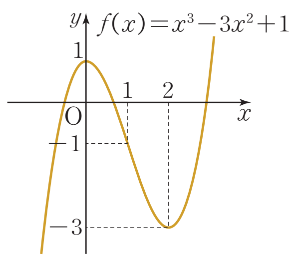
표에서
↗, ↘는 위로 볼록이면서 각각 증가, 감소를 나타내고
↗, ↘는 아래로 볼록이면서 각각 증가, 감소를 나타낸다.

풀이 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$f''(x)=6x-6=6(x-1)$이므로 $f''(x)=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	1 (극대)	↘	-1 (변곡점)	↘	-3 (극소)	↗



문제 4 다음 함수의 그래프의 개형을 그려라.

(1) $f(x)=x^3+6x^2+9x+2$ (2) $f(x)=x^4-6x^2+8x+10$

예제 05

함수 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$의 그래프의 개형을 그려라.

풀이 ① 함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

② 임의의 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

③ $f(0)=0$이므로 원점을 지난다.

④ $f'(x)=\dfrac{-(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

⑤ $f''(x)=\dfrac{(x^2+1)(2x^3-6x)}{(x^2+1)^4}=\dfrac{2x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$이므로

$f''(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

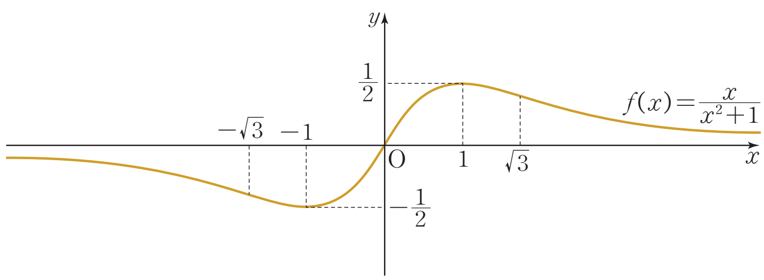
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

원점에 대칭이므로 $x\le 0$ 또는 $x\ge 0$인 경우만 나타내어도 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (변곡점)	↘	$-\dfrac{1}{2}$ (극소)	↗	0 (변곡점)	↗	$\dfrac{1}{2}$ (극대)	↘	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (변곡점)	↘

⑥ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}=0$이므로 x축이 점근선이다.

따라서 함수 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



문제 5 다음 함수의 그래프의 개형을 그려라.

(1) $y=x+\dfrac{1}{x}$ (2) $y=\dfrac{\ln x}{x}$

예제 06 함수 $f(x)=e^{-x^2}$의 그래프의 개형을 그려라.

풀이 ① 함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

② 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

③ $f(0)=1$이므로 y축과 교점은 $(0,\ 1)$이다.

④ $f'(x)=-2xe^{-x^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

⑤ $f''(x)=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}=2e^{-x^2}(2x^2-1)$

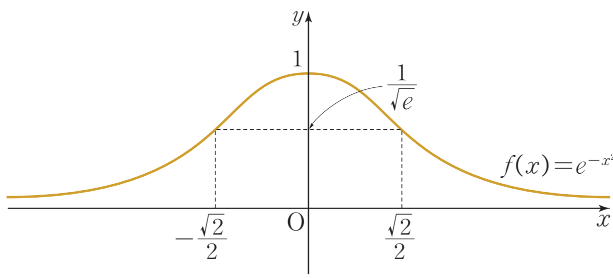
$f''(x)=0$에서 $\quad x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	⤴	$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ (변곡점)	↗	1 (극대)	↘	$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ (변곡점)	⤵

⑥ $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x^2}=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x^2}=0$이므로 x축이 점근선이다.

따라서 함수 $f(x)=e^{-x^2}$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



문제 6 다음 함수의 그래프의 개형을 그려라.

(1) $y=xe^x$ (2) $y=x\ln x$

(3) $y=\ln(x^2+1)$ (4) $y=x+2\sin x\ (0<x<2\pi)$

함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 함수 $f(x)$의 극값과 구간 $[a,\ b]$에서의 양 끝 점의 함숫값 $f(a)$, $f(b)$를 이용하면 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.

극댓값과 극솟값이 반드시 최댓값과 최솟값이 되는 것은 아니다.

함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 극값을 가질 때

[1] $f(x)$의 최댓값은 극댓값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이다.

[2] $f(x)$의 최솟값은 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 작은 값이다.

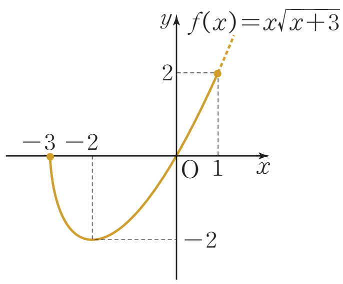
예제 07 구간 $[-3,\ 1]$에서 함수 $f(x)=x\sqrt{x+3}$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

풀이 $f'(x)=\dfrac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$ 이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-2$

구간 $[-3,\ 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	-2 (극소)	$\nearrow$	2



따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 2, $x=-2$일 때 최솟값 -2를 가진다.

답 최댓값: 2, 최솟값: -2

문제 7 다음 함수의 주어진 구간에서의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $f(x)=x^3+3x^2+2$ $[-1,\ 1]$

(2) $f(x)=x^4-4x^3-8x^2+1$ $[-2,\ 0]$

문제 8 다음 함수의 주어진 구간에서의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $f(x)=(1+\cos x)\sin x$ $[0,\ \pi]$

(2) $f(x)=-\dfrac{\ln x}{x}$ $[1,\ e^3]$

03 방정식과 부등식에의 활용

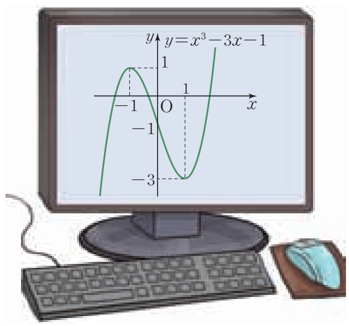
● 방정식과 부등식에 활용할 수 있다.

함수의 그래프는 방정식과 부등식에 어떻게 활용되는가?

생각 열기

탐구 활동

함수 $y=x^3-3x-1$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 물음에 답하여 보자.



1. 곡선 $y=x^3-3x-1$이 x축과 만나는 점의 x좌표를 구하는 방정식을 만들어 보자.

2. 그래프를 이용하여 **1**에서 구한 방정식의 실근의 개수를 구하여 보자.

함수의 그래프를 이용하여 방정식의 실근의 개수를 구하여 보자.

방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표이다. 따라서 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 개수와 같다.

또 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이다. 따라서 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

이와 같이 함수의 그래프를 이용하면 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구할 수 있다.

예제 01 방정식 $-x^3+6x^2-9x+2=0$의 서로 다른 실근의 개수를 구하여라.

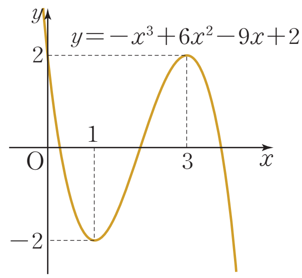
풀이 $f(x)=-x^3+6x^2-9x+2$라고 하면

$f'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 세 점에서 만나므로 방정식의 서로 다른 실근은 3개이다.

답 3

문제 1 그래프를 이용하여 다음 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구하여라.

(1) $x^3-3x^2+3=0$ (2) $2x^4-4x^2+1=0$

(3) $e^x-x=2$ (4) $x-\cos x=\dfrac{1}{2}$

예제 02 방정식 $x-\ln x=k$가 서로 다른 두 실근을 가지기 위한 실수 k값의 범위를 구하여라.

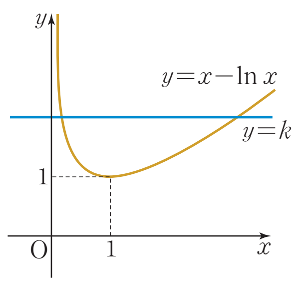
풀이 $f(x)=x-\ln x$라고 하면 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

또 $\lim\limits_{x\to 0+}(x-\ln x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\ln x)=\infty$이다.

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$



따라서 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지기 위한 k값의 범위는 $k>1$이다.

답 $k>1$

문제 2 다음 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 실수 k의 값에 따라 조사하여라.

(1) $x+\dfrac{4}{x}=k$ (2) $e^x=x+k$

함수의 그래프를 이용하여 부등식을 증명하여 보자.

어떤 구간에서 부등식 $f(x) \geq 0$이 성립함을 증명할 때에는 주어진 구간에서 함수 $y=f(x)$의 최솟값을 구하여 (최솟값)≥ 0임을 보이면 된다.

또 어떤 구간에서 부등식 $f(x) \geq g(x)$가 성립함을 증명할 때에는

$$h(x)=f(x)-g(x)$$

라 하고 주어진 구간에서 함수 $y=h(x)$의 최솟값을 구하여 (최솟값)≥ 0임을 보이면 된다.

예제 03 $x \geq 0$일 때, $e^{x-1} > x-1$이 성립함을 증명하여라.

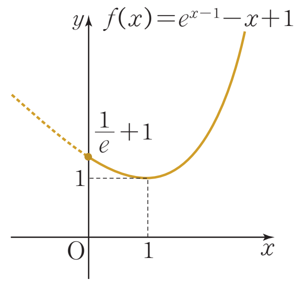
증명 $f(x)=e^{x-1}-x+1$이라고 하면

$f'(x)=e^{x-1}-1$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frac{1}{e}+1$	↘	1	↗



주어진 구간에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때, 극소이면서 최소이다. 따라서 최솟값이 $f(1)=1$이므로 $x \geq 0$인 모든 x에 대하여

$f(x)=(e^{x-1})-(x-1)>0$

$e^{x-1}>x-1$

어떤 구간에서 ($f(x)$의 최솟값)>0이면 $f(x)>0$이다.

문제 3 $x>0$일 때, 다음 부등식이 성립함을 증명하여라.

(1) $e^{-x}>1-x$　　　　(2) $x>\ln(1+x)$

발전

문제 4 $0<x<\frac{\pi}{2}$일 때, $\cos x > 1-\frac{x^2}{2}$이 성립함을 증명하여라.

창의 up

$f(0)=g(0)$인 미분가능한 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 $f'(x)>g'(x)$이면 $f(x) \geq g(x)$임을 설명하여라.

[해답 p.213]

중단원 기초

수준별 학습

1 다음 곡선 위의 주어진 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

01 접선의 방정식

(1) $y=x\sqrt{x}$ $(1,\ 1)$

(2) $y=\ln(x+1)$ $(1,\ \ln 2)$

(3) $y=\tan x$ $\left(\frac{\pi}{4},\ 1\right)$

2 주어진 곡선에 접하고, 기울기 m이 다음과 같은 접선의 방정식을 구하여라.

01 접선의 방정식

(1) $y=\frac{x-1}{x+1}$ $(x>0)$, $m=\frac{1}{2}$

(2) $y=e^{x-1}$, $m=e$

(3) $y=\cos x$ $(0\le x\le 2\pi)$, $m=1$

3 다음 곡선의 오목과 볼록을 조사하고, 변곡점을 구하여라.

02 함수의 그래프
곡선의 오목과 볼록,
변곡점

(1) $y=xe^{-x}$

(2) $y=x+\sin x$ $(0<x<2\pi)$

4 다음 함수의 그래프를 그려라.

02 함수의 그래프

(1) $y=\frac{x^2}{x-1}$

(2) $y=x-2\sqrt{x}$

(3) $y=x-\ln x$

(4) $y=\sin x-\cos x$ $(0\le x\le \pi)$

5 다음 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구하여라.

03 방정식과 부등식에의 활용

(1) $e^x-x=0$

(2) $x+\sin x=\frac{1}{2}$

중단원 기본

1 곡선 $y=\sqrt{x-2}$ 위의 점 $(3,\ 1)$을 지나고, 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

01 접선의 방정식

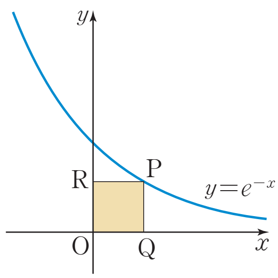
2 점 $(3,\ 2)$에서 곡선 $y=\dfrac{x-1}{x}$에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

01 접선의 방정식

3 곡선 $y=\ln(x^2-2x+2)$의 두 변곡점 사이의 거리를 구하여라.

02 함수의 그래프
변곡점

4 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=e^{-x}$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서 x축과 y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라고 할 때, 직사각형 OQPR의 넓이의 최댓값을 구하여라.



02 함수의 그래프
최댓값과 최솟값

5 두 함수 $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=a\ln x$에 대하여 $x>0$일 때, $f(x)\ge g(x)$가 성립하도록 하는 양수 a값의 범위를 구하여라.

03 방정식과 부등식에의 활용

중단원 실력

1 x축 위의 점 $(t,\ 0)$에서 곡선 $y=e^{-x^2}$에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있을 때, t값의 범위를 구하여라.

01 접선의 방정식

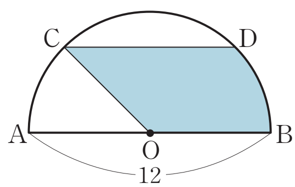
2 함수 $f(x)=xe^{ax+b}$이 $x=-1$에서 극솟값 $-\dfrac{1}{e}$을 가질 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

02 함수의 그래프

3 곡선 $y=ax^2+x+2\sin x$가 구간 $(0,\ 2\pi)$에서 변곡점을 가지기 위한 상수 a값의 범위를 구하여라.

02 함수의 그래프
변곡점

4 오른쪽 그림과 같이 지름 AB의 길이가 12인 반원에서 지름에 평행한 현 CD를 그을 때 생기는 도형 OBDC의 넓이의 최댓값을 구하여라.
(단, 점 O는 반원의 중심)



02 함수의 그래프
최댓값과 최솟값

5 방정식 $\dfrac{3}{x^2-4x+7}=k$가 서로 다른 두 실근을 가질 때, 실수 k값의 범위를 구하여라.

03 방정식과 부등식에의 활용

수행 과제

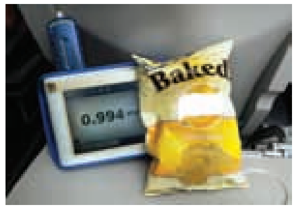
보일 법칙

오른쪽 그림은 비행기가 이륙하기 전과 이륙한 후의 과자 봉지의 모양이다.

비행기 내의 온도가 일정한 상태에서 고도가 높아지면 기압은 낮아지므로 과자 봉지는 팽창하게 된다.

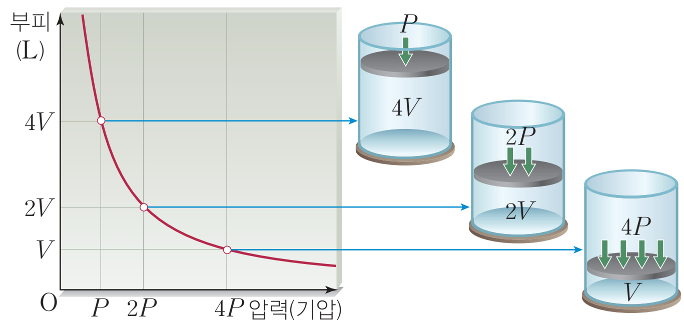
영국의 과학자 보일(Boyle, R. ; 1627~1691)은 온도가 일정할 때 기체의 부피는 압력에 반비례한다는 사실을 발견하였다.

즉, 온도가 일정할 때 기체의 부피 V는 압력 P에 반비례하므로 $P_0V_0=PV$인 관계가 성립한다. 이것을 보일 법칙이라고 한다.



이륙하기 전의 과자 봉지(0.994기압)

이륙한 후의 과자 봉지(0.790기압)



25 ℃에서 공기의 부피 $V(\text{m}^3)$와 압력 $P(\text{kPa})$ 사이에 $PV=5.3$의 관계가 성립한다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

| 과 제 | 1 $P=10(\text{kPa})$일 때, 부피 V를 구하여 보자.

| 과 제 | 2 압력이 $P=p$에서 $P=p+h$로 변할 때, 부피 V의 평균변화율을 구하여 보자.

| 과 제 | 3 $P=10(\text{kPa})$일 때, 부피 V의 순간변화율을 구하여 보자.

대단원 학습 내용 정리

1 함수의 몫의 미분법

함수의 몫의 미분법

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ $(g(x)\neq 0)$에 대하여

(1) $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

(2) $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}'=-\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

함수 $y=x^{\alpha}$ (α는 실수)의 도함수

실수 α에 대하여 함수 $y=x^{\alpha}$의 도함수는

$$y'=\alpha x^{\alpha-1}$$

2 합성함수의 미분법

미분가능한 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$는 미분가능하며, 그 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

3 역함수의 미분법

함수 $f(x)$가 미분가능하고, 그 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하고 미분가능할 때, $y=f^{-1}(x)$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}} \text{ 또는 } (f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

4 이계도함수

함수 $y=f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 미분가능할 때, $f'(x)$의 도함수

$$f''(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

를 $f(x)$의 이계도함수라고 한다.

5 접선의 방정식

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

6 함수의 그래프

함수의 오목과 볼록, 변곡점

(1) 함수 $y=f(x)$가 어떤 구간에서
  ① $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록하다.
  ② $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하다.

(2) 함수 $f(x)$에서 $f''(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(a, f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

함수의 그래프

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음을 고려하여 그리면 편리하다.

❶ 함수의 정의역과 치역
❷ 대칭성과 주기
❸ 좌표축과의 교점
❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소
❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점
❻ $\lim_{x\to\infty}f(x)$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)$, 점근선

7 방정식과 부등식에의 활용

방정식에의 활용

(1) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표이다.

(2) 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이다.

부등식에의 활용

(1) $f(x)\geq 0$이 성립함을 증명할 때에는 주어진 구간에서 $y=f(x)$의 최솟값이 0보다 크거나 같음을 보인다.

(2) $f(x)\geq g(x)$가 성립함을 증명할 때에는 $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고, 주어진 구간에서 $y=h(x)$의 최솟값이 0보다 크거나 같음을 보인다.

용어와 기호 이계도함수, 변곡점, $f''(x)$, y'', $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$

대/단/원 평가 문제

선택형

1 함수 $y=\dfrac{2x^3+3x^2-x+1}{x^2}$에 대하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하면?

① $2x+\dfrac{1}{x^3}$　② $2+\dfrac{3-x}{x^2}$
③ $2+\dfrac{2x-1}{x^3}$　④ $2+\dfrac{x-2}{x^3}$
⑤ $3x-1+\dfrac{1}{x^2}$

2 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $f(2)=3$, $f'(2)=3$, $g(1)=2$, $g'(1)=4$를 만족시킬 때, $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(g(x))-3}{x-1}$의 값은?

① 4　② 6　③ 8
④ 10　⑤ 12

3 미분가능한 함수 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$에 대하여 $f(a)=b$, $f'(a)=c$일 때, $g'(b)$의 값은?

① $\dfrac{1}{a}$　② $\dfrac{1}{b}$　③ $\dfrac{1}{c}$
④ a　⑤ b

4 함수 $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x+1}$에 대하여 $f(0)+f'(0)$의 값은?

① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ 1
④ 2　⑤ 4

5 함수 $y=\dfrac{(x-3)^2(x-1)}{(x-2)^3}$의 도함수는?

① $y'=\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-2)^4}$
② $y'=\dfrac{(x+1)^2(x-3)}{(x-2)^4}$
③ $y'=\dfrac{(x+2)(x-3)}{(x-2)^4}$
④ $y'=\dfrac{(x+2)^2(x-3)}{(x-2)^4}$
⑤ $y'=\dfrac{(x+1)(x+2)(x-3)}{(x-2)^4}$

6 곡선 $y=\tan(\sin x)$ 위의 점 $(\pi,\ 0)$에서의 접선의 기울기는?

① -3　② -2　③ -1
④ 0　⑤ 1

7 곡선 $y=x-x\ln x$에 접하고 직선 $x-y+2=0$과 평행한 직선의 방정식은?

① $y=x+e$　② $y=x-e$　③ $y=x-1$
④ $y=x+\dfrac{1}{e}$　⑤ $y=x+\dfrac{2}{e}$

8 두 곡선 $y=a-\sin^2 x$와 $y=\cos x$가 $x=t$에서 공통인 접선을 가질 때, 상수 a의 값은?
(단, $0<t<\pi$)

① $\dfrac{1}{2}$　② 1　③ $\dfrac{5}{4}$
④ 2　⑤ $\dfrac{5}{2}$

9 함수 $f(x)=xe^x$의 그래프에 대한 다음 설명 중에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $\lim_{x \to -\infty} f(x)=0$이다.

ㄴ. 변곡점의 좌표는 $\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$이다.

ㄷ. 극솟값은 $x=-1$일 때, $-\frac{1}{e}$이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)=ax-a\sin 2x$의 최댓값이 π일 때, 상수 a의 값은? (단, $a>0$)

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

11 방정식 $e^x=kx$에 대한 다음 설명 중에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, k는 상수)

ㄱ. $k>e$이면 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

ㄴ. $0 \le k<e$이면 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

ㄷ. $k<0$ 또는 $k=e$이면 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12 $x>0$일 때, $e^x-x>k$가 성립하기 위한 실수 k 값의 범위는?

① $k \le -2$　② $k \le -1$　③ $k \le 0$
④ $k \le 1$　⑤ $k \le 2$

서답형

13 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여
$f(2x+1)=x^2-4x+3$일 때, $f'(5)$의 값을 구하여라.

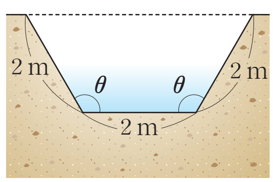
14 곡선 $y=\sqrt{2x}$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하였더니 직선 $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$에 접하였다. 상수 m, n에 대하여 $m-2n$의 값을 구하여라.

|서|술|형|

15 함수 $f(x)=(\ln x)^2$에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{x-1}$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

|서|술|형|

16 어느 공장에서 필요한 물을 끌어오기 위해 수로를 설치하려고 한다. 수로의 단면은 다음 그림과 같이 각 변의 길이가 2 m라고 할 때, 단면의 넓이의 최댓값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라. $\left(\text{단, } \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$



M+ History

수 학 + 역 사

방정식의 실근의 어림한 값 구하기

뉴턴(Newton, I. ; 1642～1727)은 다음과 같이 도함수를 이용하여 방정식 $f(x)=0$의 무리수인 근 r의 어림값을 구하는 방법을 생각하였다.

1단계 x축 위에 적당한 점 x_0을 정하고 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x_0,\ f(x_0))$에서의 접선의 방정식 $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$을 구한다.

2단계 $f'(x_0)\neq 0$이라 할 때, 이 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표 x_1을 다음과 같이 구한다.

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

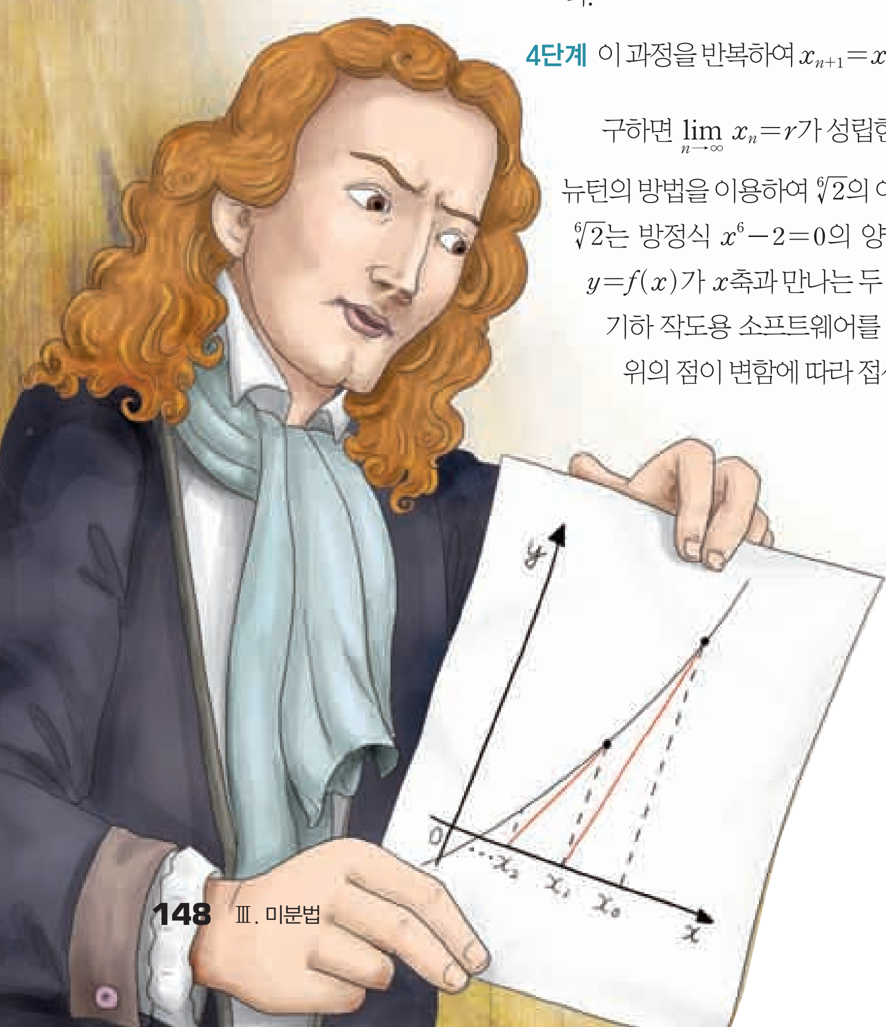
3단계 이렇게 해서 얻어진 새로운 x_1을 가지고 **1, 2단계**를 반복하여 얻어진 값을 x_2라고 한다.

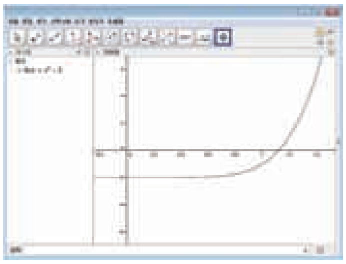
4단계 이 과정을 반복하여 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ 을 만족시키는 수열 $\{x_n\}$ (단, $n\geq 0$) 을 구하면 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=r$가 성립한다.

뉴턴의 방법을 이용하여 $\sqrt[6]{2}$의 어림한 값을 구하여 보자.

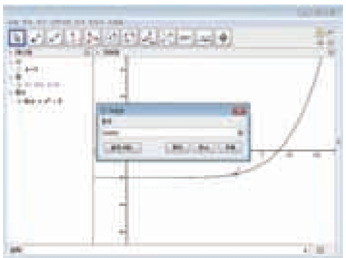
$\sqrt[6]{2}$는 방정식 $x^6-2=0$의 양의 실근이므로 함수 $f(x)=x^6-2$라고 하면 곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 두 점의 x좌표 중에서 양수인 것을 구하면 된다.

기하 작도용 소프트웨어를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리고 그래프 위의 점이 변함에 따라 접선이 어떻게 변하는지 살펴보자.





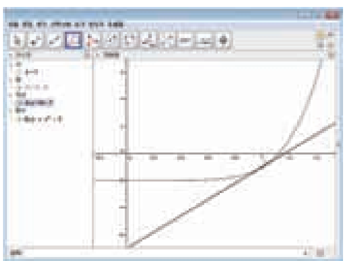
먼저 입력창에 '$f(x)=x$^6−2' 를 입력하여 함수 $f(x)=x^6-2$의 그래프를 그린 다음에 도구 상자의 '기하창 이동' 아이콘 을 누르고 마우스를 이용하여 함수 $f(x)$의 그래프가 x축의 양의 부분과 만나는 점의 근방으로 그래프를 옮긴다.

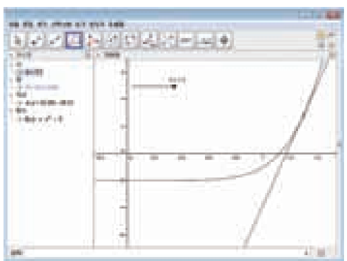


입력창에 새로운 수 'A=1' 을 입력하고 도구 상자의 '새로운 점' 아이콘 을 누른 다음에 함수 $f(x)$의 그래프 위에 새로운 점 B를 찍고 점 B를 두 번 클릭하여 설정사항에서 점 B의 좌표를 '(A, f(A))' 로 재정의한다.

도구 상자의 '접선' 아이콘 을 누르고 함수 $f(x)$의 그래프와 그래프 위의 점 B를 선택하면 점 B$(1, f(1))$에서의 접선이 그려진다.

대수창에서 수 'A=1' 을 마우스 오른쪽 단추로 눌러서 대상을 보이게 설정하면 수 A의 값을 변화시킬 수 있는 슬라이더 막대가 기하창에 표시된다. 이 슬라이더 막대를 두 번 클릭하여 설정사항에서 구간의 최솟값을 0.8로, 최댓값을 1.3으로, 증가량을 0.01로 설정한 다음에 좌우 방향키를 이용하여 슬라이더 막대의 A의 값을 변화시키면 점 B가 움직이며 접선이 변하는 모습을 볼 수 있다.





실제로 $f(x_n)=x_n^6-2$이고 $f'(x_n)=6x_n^5$이므로 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n^6-2}{6x_n^5}$,

$x_1=1$로 놓고 계산기를 사용하여 $x_2, x_3, x_4, \cdots$를 차례로 계산하면 다음과 같다.

$x_2=1.166666667$, $x_3=1.126443678$, $x_4=1.122497067$,

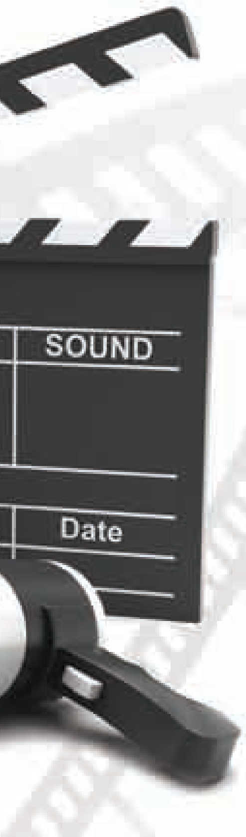
$x_5=1.122462051$, $x_6=1.122462048$, $\cdots$

따라서 $\sqrt[6]{2}$는 약 1.122462048임을 알 수 있다.


TAKE

적분법

자연스러운 움직임을 표현하는 동영상은 수 많은 사진으로 이루어진다.



|준|비|학|습|

미적분 Ⅰ 부정적분

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int(3x^2+8x)dx$　　(2) $\int(x-2)(x+1)dx$

미적분 Ⅰ 정적분

2 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_1^2(2x^3-3x^2+2x-4)dx$　　(2) $\int_1^3(x-1)(x+2)dx$

미적분 Ⅰ 정적분의 활용

3 곡선 $y=(x+1)(3-x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

1

여러 가지 적분법

소유즈 호의 중력장 탈출 에너지

2008년 4월 8일 이소연 씨는 카자흐스탄 바이코누르 우주 기지에서 소유즈 TMA-12호를 타고 국제 우주 정거장(ISS)과의 도킹에 성공함으로써 대한민국 최초의 우주인이 되었다. 이소연 씨는 국제 우주 정거장에서 9박 10일간 머물면서 18가지 우주 과학 실험 등의 우주 임무를 수행하고 무사히 귀환하였다.

소유즈 호가 국제 우주 정거장으로 진입하는 데 필요한 에너지는 얼마나 될까?

소유즈 호와 같이 질량을 가지는 지구상의 물체는 지구 중력장의 영향을 받는다. 따라서 소유즈 호가 받는 지구 중력장의 세기에 해당하는 에너지가 있어야 지구 중력장을 벗어나 국제 우주 정거장에 진입할 수 있다.

소유즈 호가 받는 지구 중력장의 세기는 지구 중심으로부터의 거리에 따라 변하는데, 지상에서 국제 우주 정거장까지의 중력장의 세기를 적분하면 소유즈 호가 국제 우주 정거장으로 진입하기 위해 필요한 에너지의 양을 알 수 있다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 170쪽

소유즈 호가 국제 우주 정거장으로 진입하기 위해 필요한 에너지는 얼마나 될까?

01

여러 가지 함수의 부정적분

● 여러 가지 함수의 부정적분을 구할 수 있다.

다항함수가 아닌 함수의 부정적분은 어떻게 구하는가?

탐구 활동

미분가능한 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때, 즉 $F'(x)=f(x)$일 때

$$\int f(x)dx=F(x)+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 함수 $\frac{1}{x}$을 미분하여 보자.

2. **1**의 결과를 이용하여 부정적분 $\int \frac{1}{x^2}dx$를 구하여 보자.

n이 0 또는 양의 정수일 때, 함수 $y=x^n$의 부정적분은

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

이다. 이제 n을 실수까지 확장하여 함수 $y=x^n$의 부정적분을 구하여 보자.

$n\neq-1$일 때, 함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 미분법에서

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=x^n\text{이므로} \quad \int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

이다.

한편 $n=-1$일 때, 로그함수의 미분법에서

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}\text{이므로} \quad \int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$$

이다.

● $\int \frac{1}{x}dx$는 $\int \frac{dx}{x}$로 나타내기도 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분

(1) $n\neq-1$일 때, $\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$

(2) $n=-1$일 때, $\int \frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+C$

보기 (1) $\int \frac{1}{x^3}dx=\int x^{-3}dx=\frac{1}{-3+1}x^{-3+1}+C=-\frac{1}{2}x^{-2}+C=-\frac{1}{2x^2}+C$

(2) $\int \sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

문제 1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int \frac{1}{x^5}dx$

(2) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

(3) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$

(4) $\int x\sqrt{x}\,dx$

실수배, 합, 차로 표현된 함수의 부정적분은 다음 성질을 이용하여 구한다.

[1] $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (단, k는 상수)

[2] $\int \{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

[3] $\int \{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

보기 $\int \frac{1+2x}{x^3}dx=\int \frac{1}{x^3}dx+2\int \frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{2}x^{-2}-2x^{-1}+C=-\frac{1}{2x^2}-\frac{2}{x}+C$

문제 2 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int \frac{3x^2-1}{x}dx$

(2) $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}dx$

삼각함수의 부정적분에 대하여 알아보자.

삼각함수의 미분법에서

$(\sin x)'=\cos x$이므로 $\quad \int \cos x\,dx=\sin x+C$

$(\cos x)'=-\sin x$이므로 $\quad \int \sin x\,dx=-\cos x+C$

$(\tan x)'=\sec^2 x$이므로 $\quad \int \sec^2 x\,dx=\tan x+C$

$(\cot x)'=-\csc^2 x$이므로 $\quad \int \csc^2 x\,dx=-\cot x+C$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

삼각함수의 부정적분

(1) $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$ (2) $\int \cos x\,dx=\sin x+C$

(3) $\int \sec^2 x\,dx=\tan x+C$ (4) $\int \csc^2 x\,dx=-\cot x+C$

예제 01 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (2\cos x-\sin x)dx$ (2) $\int \frac{\cos^3 x-2}{\cos^2 x}dx$

풀이 (1) $\int (2\cos x-\sin x)dx=2\int \cos x\,dx-\int \sin x\,dx$

$=2\sin x+\cos x+C$

(2) $\int \frac{\cos^3 x-2}{\cos^2 x}dx=\int (\cos x-2\sec^2 x)dx=\int \cos x\,dx-2\int \sec^2 x\,dx$

$=\sin x-2\tan x+C$

답 (1) $2\sin x+\cos x+C$ (2) $\sin x-2\tan x+C$

문제 3 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (\cos x+2\csc^2 x)dx$ (2) $\int \frac{\sin^3 x+2}{\sin^2 x}dx$

(3) $\int 2\tan^2 x\,dx$ (4) $\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}dx$

$\tan^2 x+1=\sec^2 x$

지수함수의 부정적분에 대하여 알아보자.

지수함수의 미분법에서

$$(e^x)'=e^x\text{이므로} \quad \int e^x dx=e^x+C$$

$$(a^x)'=a^x \ln a \ (a>0, \ a\neq 1)\text{이므로} \quad \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

지수함수의 부정적분

(1) $\int e^x dx=e^x+C$

(2) $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$ (단, $a>0$, $a\neq 1$)

예제 02 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int e^{x-2} dx$

(2) $\int 2^{x-1} dx$

풀이 (1) $\int e^{x-2} dx=e^{-2}\int e^x dx$

$=e^{-2}e^x+C=e^{x-2}+C$

(2) $\int 2^{x-1} dx=\frac{1}{2}\int 2^x dx$

$=\frac{2^x}{2\ln 2}+C=\frac{2^{x-1}}{\ln 2}+C$

답 (1) $e^{x-2}+C$ (2) $\frac{2^{x-1}}{\ln 2}+C$

문제 4 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (e^{x-1}+3^{x+2}) dx$

(2) $\int (2^x+1)^2 dx$

(3) $\int \frac{e^{2x}-x^2}{e^x-x} dx$

(4) $\int \frac{9^x-1}{3^x+1} dx$

02 치환적분법

● 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

치환적분법이란 무엇인가?

생각 열기

탐구 활동

다음 물음에 답하여 보자.

1. 함수 $\sin(3x+2)$를 미분하여 보자.

2. **1**의 결과를 이용하여 부정적분 $\int \cos(3x+2)dx$를 구하여 보자.

함수 $f(x)$의 부정적분 $\int f(x)dx$를 구하고자 할 때, $F'(x)=f(x)$인 함수 $F(x)$를 쉽게 구할 수 없는 경우가 많다. 예를 들어 위의 부정적분

$$\int \cos(3x+2)dx$$

의 경우 지금까지 배운 공식만으로는

$$F'(x)=\cos(3x+2)$$

인 함수 $F(x)$를 쉽게 구할 수 없다.

$\int \cos(3x+2)dx$와 같이 $F'(x)=f(x)$인 함수 $F(x)$를 쉽게 구할 수 없는 경우에는 변수 x를 바꾸어 계산하면 편리하다.

일반적으로 부정적분

$$F(x)=\int f(x)dx$$

에서 x를 다른 변수 t의 미분가능한 함수 $x=g(t)$로 놓으면 $F(x)=F(g(t))$가 된다.

미분가능한 함수
$y=f(u)$, $u=g(x)$
에 대하여
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$
$$=f'(u)g'(x)$$
$$=f'(g(x))g'(x)$$

$F(x)$를 t에 대하여 미분하면 합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dt}F(x)=\frac{d}{dx}F(x)\cdot\frac{dx}{dt}$$
$$=f(x)g'(t)=f(g(t))g'(t)$$

이므로 양변을 t에 대하여 적분하면

$$F(x)=\int f(g(t))g'(t)dt$$

이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$$

이와 같이 $x=g(t)$로 놓아 변수 x를 다른 변수 t의 함수로 치환하여 적분하는 방법을 **치환적분법**이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

> **치환적분법**
>
> 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면
> $$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$$

예제 01 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int(4x+3)^3dx$　　　(2) $\displaystyle\int\frac{1}{(2x-1)^2}dx$

풀이 (1) $4x+3=t$로 놓으면 $x=\dfrac{t-3}{4}$에서 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{4}$이므로

$$\int(4x+3)^3dx=\int t^3\cdot\frac{1}{4}dt=\frac{1}{4}\int t^3\,dt$$
$$=\frac{1}{16}t^4+C=\frac{1}{16}(4x+3)^4+C$$

(2) $2x-1=t$로 놓으면 $x=\dfrac{t+1}{2}$에서 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}$이므로

$$\int\frac{1}{(2x-1)^2}dx=\int\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2}dt$$
$$=-\frac{1}{2t}+C=-\frac{1}{2(2x-1)}+C$$

답 (1) $\dfrac{1}{16}(4x+3)^4+C$　(2) $-\dfrac{1}{2(2x-1)}+C$

문제 1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (3x-5)^4 dx$ (2) $\int \sin(3x-2)dx$

예제 02 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int x(x^2-1)^4 dx$ (2) $\int \cos^3 x \sin x\, dx$

$t=g(x)$로 놓으면
$\int f(g(x))g'(x)dx$
$=\int f(t)dt$

풀이 (1) $x^2-1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$$\int x(x^2-1)^4 dx=\frac{1}{2}\int (x^2-1)^4 2x\, dx$$
$$=\frac{1}{2}\int (x^2-1)^4(x^2-1)' dx$$
$$=\frac{1}{2}\int t^4 dt=\frac{1}{10}t^5+C$$
$$=\frac{1}{10}(x^2-1)^5+C$$

(2) $\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$$\int \cos^3 x \sin x\, dx=\int \cos^3 x(-\cos x)' dx$$
$$=-\int t^3 dt=-\frac{1}{4}t^4+C$$
$$=-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$$

답 (1) $\frac{1}{10}(x^2-1)^5+C$ (2) $-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$

문제 2 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ (2) $\int xe^{x^2}dx$

발전

문제 3 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int \sin^3 x\, dx$ (2) $\int (2x-1)\sqrt{2x+1}\, dx$

치환적분법을 이용하여 부정적분 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$를 구하는 방법을 알아보자.

$f(x)=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$이므로

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)dx=\int \frac{1}{t}dt$$
$$=\ln|t|+C=\ln|f(x)|+C$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

$\frac{f'(x)}{f(x)}$의 부정적분

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$$

예제 03 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int \frac{2x}{x^2-1}dx$ (2) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

풀이 (1) $(x^2-1)'=2x$이므로

$$\int \frac{2x}{x^2-1}dx=\int \frac{(x^2-1)'}{x^2-1}dx=\ln|x^2-1|+C$$

(2) $(e^x+e^{-x})'=e^x-e^{-x}$이므로

$$\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx=\int \frac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}dx=\ln(e^x+e^{-x})+C$$

답 (1) $\ln|x^2-1|+C$ (2) $\ln(e^x+e^{-x})+C$

문제 4 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int \frac{3x^2-2}{x^3-2x+3}dx$ (2) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

문제 5 다음 부정적분을 구하여라.

$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

(1) $\int \tan x\,dx$ (2) $\int \cot x\,dx$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$의 꼴이 아닌 유리함수의 부정적분을 구할 때에는 먼저 주어진 유리함수를 간단한 유리함수의 합 또는 차의 꼴로 변형한 다음 적분한다.

$\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$ (단, $AB\neq0$, $A\neq B$)

보기 $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$이므로

$$\int\frac{1}{x(x+1)}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\ln|x|-\ln|x+1|+C=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$$

문제 6 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int\frac{3}{x(x+3)}dx$ (2) $\displaystyle\int\frac{2}{x^2-1}dx$

예제 04

부정적분 $\displaystyle\int\frac{x-1}{x^2-x-2}dx$를 구하여라.

풀이 $\dfrac{x-1}{x^2-x-2}=\dfrac{m}{x-2}+\dfrac{n}{x+1}$이라고 하면

$$\frac{x-1}{x^2-x-2}=\frac{(m+n)x+(m-2n)}{x^2-x-2}$$

계수를 비교하면 $m+n=1$, $m-2n=-1$이므로 $m=\dfrac{1}{3}$, $n=\dfrac{2}{3}$

따라서 $\dfrac{x-1}{x^2-x-2}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{x+1}$이므로

$$\int\frac{x-1}{x^2-x-2}dx=\int\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-2|+\frac{2}{3}\ln|x+1|+C$$

답 $\dfrac{1}{3}\ln|x-2|+\dfrac{2}{3}\ln|x+1|+C$

문제 7 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int\frac{x+2}{(x+3)(x-1)}dx$ (2) $\displaystyle\int\frac{5x-7}{x^2-3x+2}dx$

03 부분적분법

● 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

부분적분법이란 무엇인가?

탐구 활동 등식 $(x\sin x)'=(x)'\sin x+x(\sin x)'$을 이용하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. $\square$ 안에 알맞은 식을 써넣어 보자.

$$x(\sin x)'=\boxed{}-(x)'\sin x$$

2. **1**을 이용하여 $\square$ 안에 알맞은 식을 써넣어 보자.

$$\int x(\sin x)'dx=\boxed{}-\int(x)'\sin x\,dx$$

3. $f(x)=x$, $g(x)=\sin x$라고 할 때, **2**의 등식을 $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$, $g'(x)$를 사용하여 나타내어 보자.

함수의 곱의 미분법을 이용하면 함수의 곱의 부정적분을 구할 수 있다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 곱 $f(x)g(x)$를 미분하면

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

이므로 이 식의 양변을 적분하면

$$\begin{aligned}f(x)g(x)&=\int\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}dx\\&=\int f'(x)g(x)dx+\int f(x)g'(x)dx\end{aligned}$$

이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

이와 같이 적분하는 방법을 **부분적분법**이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

부분적분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

예제 01

부정적분 $\int xe^x dx$를 구하여라.

풀이 $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면 $f'(x)=1$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1\cdot e^x dx$$
$$= xe^x - e^x + C$$

답 $xe^x - e^x + C$

문제 1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int x\cos x\,dx$　　　(2) $\int xe^{3x}dx$

예제 02

부정적분 $\int \ln x\,dx$를 구하여라.

풀이 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x$이므로

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx$$
$$= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

답 $x\ln x - x + C$

문제 2 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int \ln 3x\,dx$　　　(2) $\int x\ln x\,dx$

사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

부정적분 $\int e^x \sin x\,dx$를 구하는 방법에 대하여 토의하여 보자.

04 여러 가지 함수의 정적분

● 여러 가지 함수의 정적분을 구할 수 있다.

여러 가지 함수의 정적분은 어떻게 구하는가?

생각 열기

탐구 활동

임의의 실수 x에 대하여 함수 $f(t)$가 $\int_1^x f(t)dt=x^2-3x+a$를 만족시킬 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 함수 $f(x)$와 상수 a의 값을 각각 구하여 보자.

2. **1**의 결과를 구하기 위하여 사용한 성질을 말하여 보자.

정적분과 미분의 관계를 이용하면 미적분의 기본 정리가 성립함을 알 수 있다.

즉, 함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

이다. 또한

$$a=b\text{일 때}\quad \int_a^a f(x)dx=0$$

$$a>b\text{일 때}\quad \int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

로 정의한다.

보기 (1) $\int_0^1 e^x dx=\Big[e^x\Big]_0^1=e^1-e^0=e-1$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1$

문제 1 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ (2) $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$

(3) $\int_0^1 3^x dx$ (4) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin x\,dx$

미적분 I 에서와 같이 부정적분의 성질과 미적분의 기본 정리를 이용하면 함수의 실수배, 합, 차의 정적분을 구할 수 있다.

즉, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때

[1] $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)

[2] $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

[3] $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

가 성립한다.

한편 함수 $f(x)$가 임의의 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때, 분할된 구간에서의 정적분은 다음과 같이 구할 수 있다.

[4] $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

이를 이용하여 여러 가지 함수의 정적분을 구하여 보자.

예제 01 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_0^1 \frac{e^{3x}}{e^x+1}dx+\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}dx$　　(2) $\int_{-\pi}^0 \sin x\,dx-\int_{\pi}^0 \sin x\,dx$

풀이 (1) $\int_0^1 \frac{e^{3x}}{e^x+1}dx+\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}dx$

$$=\int_0^1 \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx=\int_0^1 \frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{e^x+1}dx$$

$$=\int_0^1 \{(e^2)^x-e^x+1\}dx=\left[\frac{e^{2x}}{\ln e^2}-e^x+x\right]_0^1=\frac{1}{2}e^2-e+\frac{3}{2}$$

(2) $\int_{-\pi}^0 \sin x\,dx-\int_{\pi}^0 \sin x\,dx$

$$=\int_{-\pi}^0 \sin x\,dx+\int_0^{\pi} \sin x\,dx=\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_{-\pi}^{\pi}=0$$

답 (1) $\frac{1}{2}e^2-e+\frac{3}{2}$　(2) 0

문제 2 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{\pi}^0 \frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}dx+\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x}{\sin x+\cos x}dx$

(2) $\int_0^4 (2x+e^x)dx-\int_2^4 (2y+e^y)dy+\int_2^5 (2z+e^z)dz$

예제 02

정적분 $\int_0^{\pi}|\cos x|\,dx$를 구하여라.

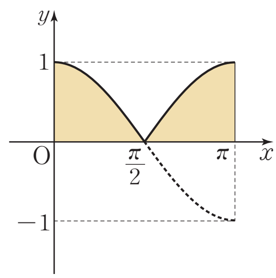
풀이 $0\le x\le \frac{\pi}{2}$일 때, $|\cos x|=\cos x$이고

$\frac{\pi}{2}\le x\le \pi$일 때, $|\cos x|=-\cos x$이므로

$$\int_0^{\pi}|\cos x|\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\,dx$$

$$=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=1+1=2$$



답 2

문제 3

다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\,dx$

(2) $\int_{-1}^{1}|e^x-1|\,dx$

예제 03

정적분을 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$을 구하여라.

풀이 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$

이때 $f(x)=\sqrt{x}$, $a=0$, $b=1$로 놓으면

$\varDelta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$, $x_k=a+k\varDelta x=\frac{k}{n}$

따라서 정적분의 정의에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

문제 4

정적분을 이용하여 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}e^{\frac{k}{n}}$

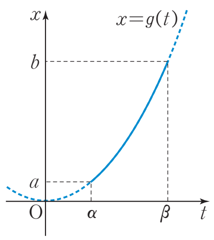
(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n}$

정적분에서 치환적분법을 어떻게 이용하는가?

부정적분의 치환적분법을 이용하여 정적분을 구하는 방법을 알아보자.

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad \cdots\cdots ①$$



t	$\alpha \to \beta$
x	$a \to b$

여기서 x를 다른 변수 t의 미분가능한 함수 $x=g(t)$로 놓으면 치환적분법에 의하여 다음이 성립한다.

$$F(x) = F(g(t)) = \int f(g(t))g'(t)dt$$

이때 $x=g(t)$에서 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$라고 하면 다음을 얻는다.

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt = \Big[F(g(t))\Big]_\alpha^\beta$$

$$= F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = F(b) - F(a) \quad \cdots\cdots ②$$

①, ②로부터 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

정적분의 치환적분법

구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이고 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$이면

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

보기

(1) $\int_0^1 2x(x^2+1)^3 dx$에서 $x^2+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이고, $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로 $\int_0^1 2x(x^2+1)^3 dx = \int_1^2 t^3 dt = \Big[\frac{1}{4}t^4\Big]_1^2 = \frac{15}{4}$

(2) $\int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx$에서 $x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$이고, $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로 $\int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx = \int_1^2 \sqrt{t}\,dt = \Big[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big]_1^2 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

문제 5 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_0^1 (3x-2)^5 dx$

(2) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+3}\,dx$

(3) $\int_0^2 \frac{2x}{x^2+1}dx$

(4) $\int_{-2}^1 \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx$

예제 04

다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^1 4e^{4x-1}dx$　　　(2) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$

풀이 (1) $4x-1=t$로 놓으면 $x=\dfrac{t+1}{4}$에서 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{4}$이고

$x=0$일 때 $t=-1$, $x=1$일 때 $t=3$이므로

$$\int_0^1 4e^{4x-1}dx=\int_{-1}^3 e^t dt=\Big[e^t\Big]_{-1}^3=e^3-\frac{1}{e}$$

(2) $\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$이고

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$이므로

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx=\int_0^1 t\,dt=\Big[\frac{1}{2}t^2\Big]_0^1=\frac{1}{2}$$

답 (1) $e^3-\dfrac{1}{e}$　(2) $\dfrac{1}{2}$

문제 6

다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$　　　(2) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{(\ln x)^2}{-2x}dx$

예제 05

다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^2 x\sin x\,dx$　　　(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cot x\,dx$

풀이 (1) $\cos x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=-\sin x$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^2 x\sin x\,dx=\int_1^0(-3t^2)dt=\Big[-t^3\Big]_1^0=1$$

(2) $\sin x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\cos x$이고

$x=\dfrac{\pi}{4}$일 때 $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cot x\,dx=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}dx=2\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\frac{1}{t}dt=2\Big[\ln t\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1=\ln 2$$

답 (1) 1　(2) $\ln 2$

문제 7

다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$　　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$

예제 06 연속함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립함을 보여라.

$$f(-x)=f(x)\text{이면 } \int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

풀이 정적분의 성질에 의하여 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx$

$\int_{-a}^{0} f(x)dx$에서 $x=-t$로 놓으면 $\dfrac{dx}{dt}=-1$이므로

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx=\int_{a}^{0} f(-t)\cdot(-1)dt=\int_{0}^{a} f(-t)dt=\int_{0}^{a} f(x)dx$$

따라서 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$가 성립한다.

문제 8 연속함수 $f(x)$에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$이 성립함을 보여라.

문제 9 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{-1}^{1} (x^5+x^4+\cdots+1)dx$　　(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x-x\cos x)dx$

정적분에서 부분적분법을 어떻게 이용하는가?

부정적분의 부분적분법을 이용하여 정적분을 구하는 방법을 알아보자.

미분가능한 두 함수의 곱의 미분법에서

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

이므로 $f(x)g(x)$는 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$의 한 부정적분이다.

따라서

$$\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b=\int_a^b\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}dx$$
$$=\int_a^b f'(x)g(x)dx+\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

정적분의 부분적분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고 $f'(x)$, $g'(x)$가 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

예제 07 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$ (2) $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx$

풀이 (1) $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면 $f'(x)=1$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int_0^1 xe^x dx=\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x dx=e-\Big[e^x\Big]_0^1=1$$

(2) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=x$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\dfrac{x^2}{2}$이므로

$$\int_1^e x\ln x\,dx=\Big[\frac{x^2}{2}\ln x\Big]_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_1^e=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$$

답 (1) 1 (2) $\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{1}{4}$

문제 10 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$ (2) $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$

발전

문제 11 정적분 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\,dx$를 구하여라.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

지구 중심으로부터의 거리가 r m이고, 질량이 m kg인 물체가 받는 지구 중력장의 세기 $F(r)$N은 다음과 같다.

$$F(r)=G\frac{Mm}{r^2}$$

($M=5.975\times10^{24}$은 지구의 질량, $G=6.6720\times10^{-11}$은 만유인력 상수)

질량이 5000 kg인 소유즈 호가 지구 표면으로부터 350 km 떨어진 국제 우주 정거장으로 진입하기 위해 필요한 에너지를 구하여라. (단, 지구 반지름의 길이는 6400 km이다.)

중단원 기초

1 다음 부정적분을 구하여라.

01 여러 가지 함수의 부정적분

(1) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+1}{x}dx$

(3) $\displaystyle\int (\sin x+2\cos x)dx$　　(4) $\displaystyle\int (\sec x+\cos x)\tan x\,dx$

(5) $\displaystyle\int (2e^x+3^x)dx$　　(6) $\displaystyle\int e^{x+3}dx$

2 다음 부정적분을 구하여라.

02 치환적분법

(1) $\displaystyle\int (2x-3)^5dx$　　(2) $\displaystyle\int \sqrt{2-x}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \cos(3x-2)dx$　　(4) $\displaystyle\int e^{-4x+3}dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2-x+3}dx$　　(6) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4}dx$

3 다음 부정적분을 구하여라.

03 부분적분법

(1) $\displaystyle\int xe^{-x}dx$　　(2) $\displaystyle\int x\sin 4x\,dx$

4 다음 정적분을 구하여라.

04 여러 가지 함수의 정적분
정적분의 치환적분법

(1) $\displaystyle\int_0^1 (2x-1)^4dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{3x^2+2}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\cos x\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$

(5) $\displaystyle\int_0^4 xe^{x^2}dx$　　(6) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x}dx$

5 다음 정적분을 구하여라.

04 여러 가지 함수의 정적분
정적분의 부분적분법

(1) $\displaystyle\int_1^e 3\ln x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^3 2xe^x dx$

중단원 기본

1 함수 $f(x)=\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx$에 대하여 $f(0)=2$일 때, $f(\pi)$의 값을 구하여라.

01 여러 가지 함수의 부정적분

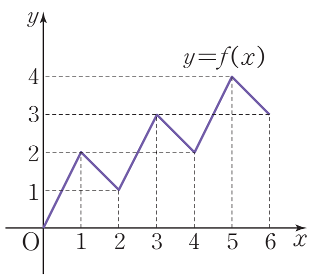
2 x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 서로 다른 두 실근이 2, 3일 때, 부정적분 $\int \frac{2x+3}{x^2+ax+b}dx$를 구하여라.

02 치환적분법
유리함수의 부정적분

3 정적분 $\int_0^{\pi}|\sin x\cos x|dx$를 구하여라.

04 여러 가지 함수의 정적분

4 $0\le x\le 6$에서 정의된 함수 $f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $\int_1^2 f(3x-2)dx$의 값을 구하여라.



04 여러 가지 함수의 정적분
정적분의 치환적분법

5 함수 $f(x)=\begin{cases} x+1 & (0\le x\le 1) \\ 3-x & (1\le x\le 2)\end{cases}$에 대하여 정적분 $\int_0^2 e^x f(x)dx$의 값을 구하여라.

04 여러 가지 함수의 정적분
정적분의 부분적분법

[해답 p.217]

중단원 실력

1 함수 $f(x)=x\ln x-x$의 도함수를 $f'(x)$라 하고, 함수 $f'(x)$의 역함수를 $g(x)$라고 하자.
$\int g(x-1)dx=h(x)+C$가 성립하고 $h(1)=1$일 때, $h(2)$의 값을 구하여라. (단, C는 적분상수이다.)

01 여러 가지 함수의 부정적분

2 어느 제조 업체가 새로운 기술로 제품을 생산한 지 x개월 후의 이익을 $P(x)$ 천만 원이라고 하면 $P'(x)$는

$$P'(x)=3x^2e^{-x^3}$$

이라고 한다. 새로운 기술로 제품을 생산한 지 1개월 후의 이익이 3천만 원일 때, $P(x)$를 구하여라.

02 치환적분법

3 $0<x<\pi$에서 정의된 함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x)=x\cos x$이고, $f(x)$의 최댓값이 $\frac{\pi}{2}$일 때, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값을 구하여라.

03 부분적분법

4 연속함수 $f(x)$에 대하여

$$f(x)+f(-x)=\cos\frac{x}{2}$$

일 때, $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$의 값을 구하여라.

04 여러 가지 함수의 정적분
정적분의 치환적분법

5 함수 $f(x)$가 $f(x)=x\cos x+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt$를 만족시킬 때, $f(0)$의 값을 구하여라.

04 여러 가지 함수의 정적분
정적분의 부분적분법

2 정적분의 활용

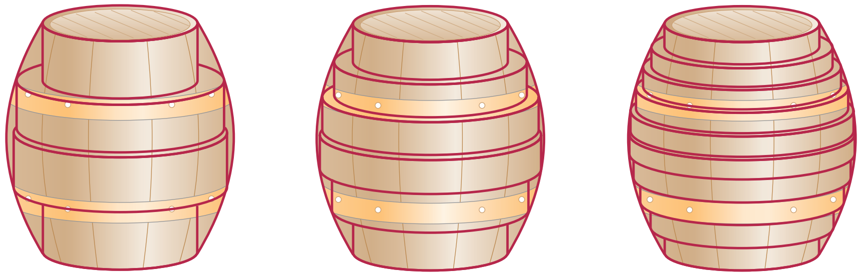
적분은 넓이를 구하는 것에서 출발하여 부피를 구하는 것으로 발전하였다.

케플러(Kepler, J. ; 1571～1630)가 살던 때 포도주의 가격은 포도주 통 안에 막대를 넣어 포도주가 채워져 있는 높이를 재서 결정하였다.

케플러는 당시 이 방법이 매우 불합리하다고 생각하였다. 포도주를 담는 통이 배가 볼록한 모양으로 실제 담겨져 있는 포도주의 양이 높이와 비례하지 않았기 때문이다.

예를 들어 막대로 잰 높이가 통의 $\frac{1}{4}$이라면 가격은 가득찬 경우의 $\frac{1}{4}$이지만 통은 아래로 갈수록 좁아져 실제 포도주의 양은 통의 $\frac{1}{4}$보다는 적다.

이에 케플러는 정확한 포도주 통의 부피를 구하기 위하여 다음 그림과 같이 포도주 통을 무수히 많은 얇은 원기둥으로 자르고 그 부피를 더하는 방법을 연구하였다.



단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자.

183쪽

포도주 통의 부피를 구할 수 있을까?

01

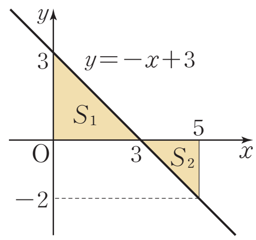
넓이

● 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

곡선과 좌표축 사이의 넓이는 어떻게 구하는가?

탐구 활동

오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-x+3$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 직선 $y=-x+3$과 x축 및 직선 $x=5$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.



1. S_1, S_2를 각각 정적분으로 나타내어 보자.

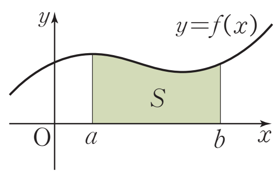
2. **1**의 정적분의 값을 각각 구하여 보자.

함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여 보자.

(ⅰ) 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\geq 0$일 때

넓이 S는 정적분의 정의에 의하여

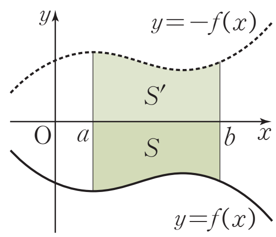
$$S=\int_a^b f(x)dx$$



(ⅱ) 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\leq 0$일 때

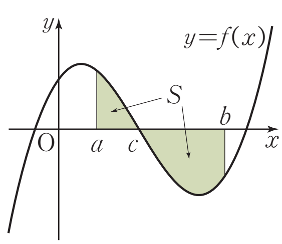
넓이 S는 곡선 $y=f(x)$를 x축에 대칭이동시킨 곡선 $y=-f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S'과 같으므로

$$S=\int_a^b \{-f(x)\}dx=\int_a^b |f(x)|dx$$



(ⅲ) 구간 $[a,\ c]$에서 $f(x)\geq 0$이고, 구간 $[c,\ b]$에서 $f(x)\leq 0$일 때

$$\begin{aligned}S&=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b \{-f(x)\}dx\\&=\int_a^c |f(x)|dx+\int_c^b |f(x)|dx\\&=\int_a^b |f(x)|dx\end{aligned}$$



이상을 정리하면 다음과 같다.

곡선과 x축 사이의 넓이

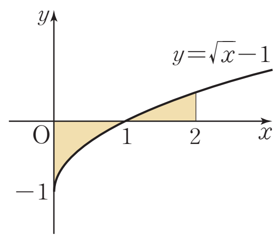
함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

예제 01 곡선 $y=\sqrt{x}-1$과 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

곡선과 x축으로 둘러싸인 도형을 그래프로 그려 보고, $y\geq 0$인 구간과 $y\leq 0$인 구간으로 나누어 계산한다.

풀이 주어진 곡선은 오른쪽 그림과 같이 구간 $[0,\ 1]$에서 $y\leq 0$이고, 구간 $[1,\ 2]$에서 $y\geq 0$이므로 넓이 S는



$$\begin{aligned}S&=\int_0^2 |\sqrt{x}-1|\,dx\\&=\int_0^1(-\sqrt{x}+1)\,dx+\int_1^2(\sqrt{x}-1)\,dx\\&=\left[-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\right]_0^1+\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x\right]_1^2\\&=\frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)\end{aligned}$$

답 $\frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)$

문제 1 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=\frac{1}{x}$, x축, $x=-e$, $x=-1$

(2) $y=\sqrt{x-1}$, x축, $x=3$

문제 2 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

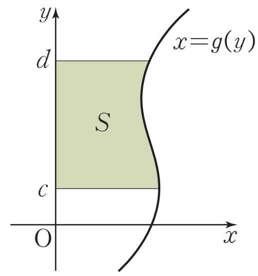
(1) $y=\sin x\ (0\leq x\leq \pi)$, x축

(2) $y=e^x$, x축, $x=0$, $x=2$

(3) $y=\ln x$, x축, $x=\frac{1}{e}$, $x=e$

이제 곡선과 y축 사이의 넓이를 구하여 보자.

함수 $x=g(y)$가 구간 $[c,\ d]$에서 연속일 때, 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 구간 $[c,\ d]$에서 $g(y)\geq 0$이면



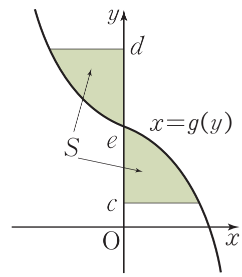
$$S=\int_c^d g(y)dy$$

이고, $g(y)\leq 0$이면

$$S=\int_c^d \{-g(y)\}dy$$

와 같다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 구간 $[c,\ e]$에서 $g(y)\geq 0$이고, 구간 $[e,\ d]$에서 $g(y)\leq 0$이면 넓이 S는 다음과 같다.



$$S=\int_c^d |g(y)|dy$$

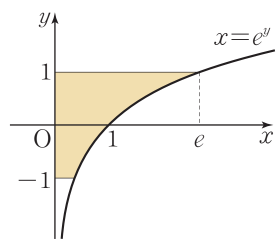
예제 02 곡선 $y=\ln x$와 y축 및 두 직선 $y=-1$, $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

풀이 $y=\ln x$를 x에 관하여 풀면 $x=e^y$

주어진 곡선은 오른쪽 그림과 같이 구간 $[-1,\ 1]$에서 $e^y\geq 0$이므로 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{1} e^y dy=\Big[e^y\Big]_{-1}^{1}=e-\frac{1}{e}$$

답 $e-\dfrac{1}{e}$



문제 3 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=\sqrt{2x}$, y축, $y=2$

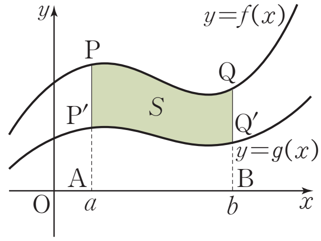
(2) $y=\ln(x-1)$, y축, $y=-1$, $y=1$

문제 4 곡선 $y=e^x-1$과 y축 및 직선 $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

이제 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 방법을 알아보자.

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여 보자.

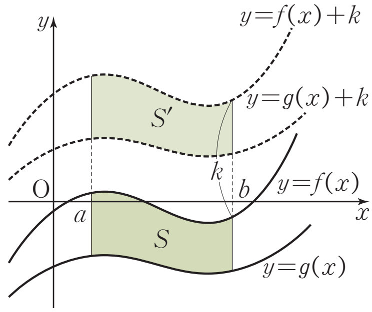
(i) 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\ge g(x)\ge 0$일 때 넓이 S는 도형 PABQ의 넓이에서 도형 P′ABQ′의 넓이를 뺀 것과 같으므로



$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$$
$$=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

이다.

(ii) 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\ge g(x)$이고 $f(x)$ 또는 $g(x)$의 값이 음수일 때 오른쪽 그림과 같이 두 곡선을 y축의 방향으로 k만큼 평행이동하여



$f(x)+k\ge g(x)+k\ge 0$

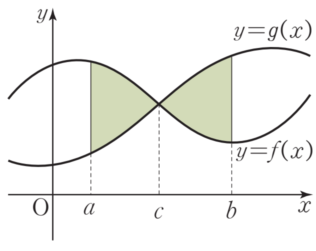
이 되게 할 수 있다.

따라서 넓이 S는 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동시킨 곡선 $y=f(x)+k$와 $y=g(x)+k$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S'과 같으므로

$$S=\int_a^b [\{f(x)+k\}-\{g(x)+k\}]dx$$
$$=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

이다.

(iii) 구간 $[a,\ c]$에서 $f(x)\ge g(x)$이고 구간 $[c,\ b]$에서 $f(x)\le g(x)$일 때 넓이 S는 구간을 $[a,\ c]$와 $[c,\ b]$로 나누어 구하면



$$S=\int_a^c \{f(x)-g(x)\}dx+\int_c^b \{g(x)-f(x)\}dx$$
$$=\int_a^c |f(x)-g(x)|dx+\int_c^b |f(x)-g(x)|dx$$
$$=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

두 곡선 사이의 넓이

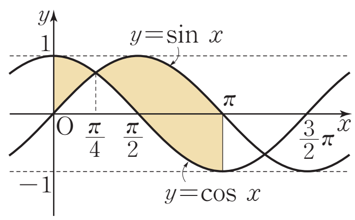
두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

예제 03 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x$ 및 두 직선 $x=0$, $x=\pi$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

적분 구간을 찾기 위하여 두 곡선의 교점의 x좌표를 구한다.

풀이 주어진 두 곡선의 교점의 x좌표를 구하면



$\sin x=\cos x\,(0\le x\le\pi)$에서 $\quad x=\dfrac{\pi}{4}$

이때 구간 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{4}\right]$에서 $\sin x\le\cos x$이고,

구간 $\left[\dfrac{\pi}{4},\ \pi\right]$에서 $\sin x\ge\cos x$이므로

구하는 넓이 S는

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\pi}|\sin x-\cos x|\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)\,dx\\&=\Big[\sin x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

답 $2\sqrt{2}$

문제 5 다음 곡선 또는 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=\sqrt{x}$, $y=x$

(2) $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $x=-1$, $x=2$

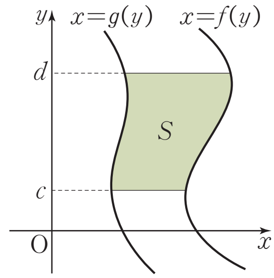
(3) $y=\sin x$, $y=\cos x-1$, $x=0$, $x=\pi$

(4) $y=\ln(x+1)$, $y=-\sin x$, $x=\pi$

두 곡선 사이의 넓이를 구할 때, 도형의 모양에 따라 y에 대하여 적분하는 것이 편리한 경우도 있다.

오른쪽 그림과 같이 두 함수 $x=f(y)$와 $x=g(y)$가 구간 $[c,\ d]$에서 연속이고, 두 곡선 $x=f(y)$와 $x=g(y)$ 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_c^d |f(y)-g(y)|\,dy$$



예제 04 곡선 $y^2=x$와 직선 $y=x-2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

풀이 주어진 곡선과 직선의 교점의 y좌표는

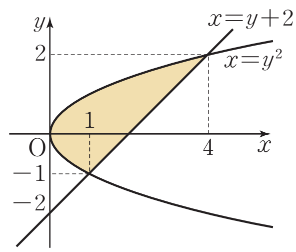
$y^2=y+2$에서 $\quad y^2-y-2=0$

$y=-1$ 또는 $y=2$

주어진 곡선은 오른쪽 그림과 같이 구간 $[-1,\ 2]$에서 $y^2\le y+2$이므로 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{2}\{(y+2)-y^2\}dy=\int_{-1}^{2}(-y^2+y+2)dy$$

$$=\left[-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2+2y\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$



답 $\dfrac{9}{2}$

문제 6 다음 곡선 또는 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

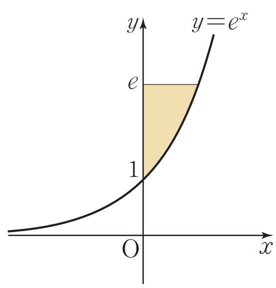
(1) $x=y^2$, $x=y^2(y-1)$ (2) $y=\ln x$, x축, y축, $y=1$

문제 7 곡선 $y=\ln x$와 이 곡선 위의 점 $(e,\ 1)$에서의 접선 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

곡선 $y=e^x$과 y축 및 직선 $y=e$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하려고 한다. 적분 변수를 x로 놓는 방법과 적분 변수를 y로 놓는 방법으로 각각 해결하고, 그 과정을 설명하여 보자.



02 부피

● 입체도형의 부피를 구할 수 있다.

입체도형의 부피는 어떻게 구하는가?

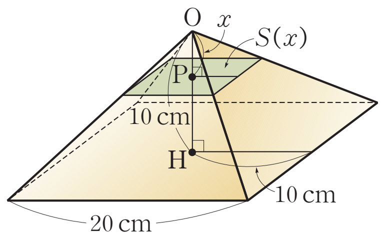
생각 열기

피라미드

현재 이집트 전 지역에서 발견된 피라미드는 94개이다. 그중 가장 대표적인 것이 기자(Giza) 지역의 기원전 2580～2560년에 만들어진 쿠푸 왕의 피라미드로 세계 7대 불가사의 가운데 가장 오래된 건축물이며, 지금까지 유일하게 남아 있는 건축물이다.

탐구 활동

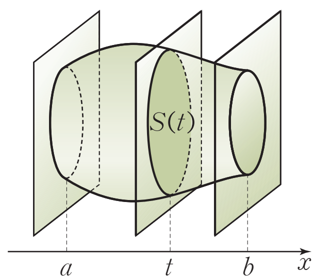
오른쪽 그림과 같이 밑면은 한 변의 길이가 20 cm인 정사각형이고, 높이가 10 cm인 정사각뿔이 있다. 입체도형의 꼭짓점 O로부터 거리가 x인 점 P에서 밑면과 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$일 때, 다음 물음에 답하여 보자.



1. 단면의 넓이 $S(x)$를 구하여 보자.

2. $\int_0^{10} S(x)\,dx$의 값과 이 입체도형의 부피를 비교하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 어떤 입체도형이 주어졌을 때, 한 직선을 x축으로 정하고, x좌표가 a, b인 두 점을 지나 x축에 수직인 두 평면 사이에 있는 부분의 부피 V를 구하여 보자.

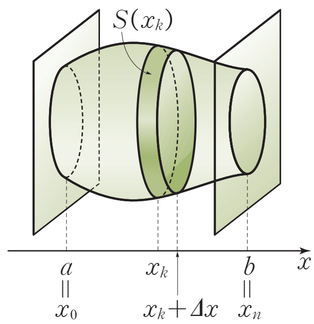


x좌표가 t인 점에서 x축과 수직인 평면으로 입체도형를 자를 때 생기는 단면의 넓이를 $S(t)$라고 하자.

또 x축 위의 구간 $[a,\ b]$를 n등분하여 양 끝 점을 포함한 각 분점의 x좌표를 차례로

$$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=b$$

라 하고, 각 소구간의 길이를 Δx라고 하자. 이때 x좌표가 x_k인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x_k)$라고 하면 밑면의 넓이가 $S(x_k)$이고 높이가 Δx인 기둥의 부피는 $S(x_k)\Delta x$이므로 이들 기둥 n개의 부피의 합 V_n은



$$V_n=\sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x$$

이다. 따라서 구분구적법과 정적분의 정의에 의하여 구하는 입체도형의 부피 V는 다음과 같다.

$$V=\lim_{n\to\infty} V_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x=\int_a^b S(x)dx$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

입체도형의 부피

구간 $[a,\ b]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_a^b S(x)dx \ (\text{단, } S(x)\text{는 구간 } [a,\ b]\text{에서 연속})$$

예제 01 어떤 물잔에 물을 부으면 물의 깊이가 x cm일 때 수면의 넓이는 $2\sqrt{x}$ cm^{2}라고 한다. 물의 깊이가 6 cm일 때 물잔에 담긴 물의 부피를 구하여라.

풀이 단면의 넓이 $S(x)$라고 하면

$S(x)=2\sqrt{x}$

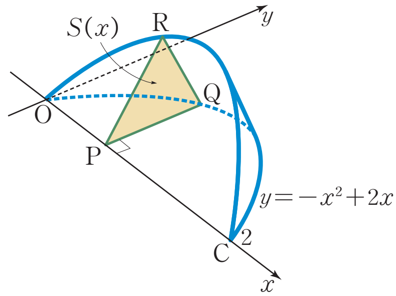
구하는 부피 V는

$$V=\int_0^6 2\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^6=8\sqrt{6}(\text{cm}^3)$$

답 $8\sqrt{6}$ cm^3

문제 1 어떤 그릇에 물을 부으면 깊이가 x cm일 때 수면은 한 변의 길이가 $\sqrt{20-2x}$ cm인 정사각형이라고 한다. 그릇의 높이가 8 cm일 때 그릇에 가득 담긴 물의 부피를 구하여라.

예제 02 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)$, $\mathrm{Q}(x,\ -x^2+2x)$를 이은 선분을 한 변으로 하고, 이 평면에 수직으로 세운 정삼각형 PQR를 만든다. 점 P가 원점에서 점 $\mathrm{C}(2,\ 0)$까지 x축 위를 움직일 때, $\triangle\mathrm{PQR}$가 그리는 입체도형의 부피를 구하여라.



풀이 $\overline{\mathrm{PQ}}=-x^2+2x$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}$를 한 변으로 하는 정삼각형 PQR의 넓이 $S(x)$는

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{\mathrm{PQ}}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(-x^2+2x)^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(x^4-4x^3+4x^2)$$

따라서 구하는 부피 V는

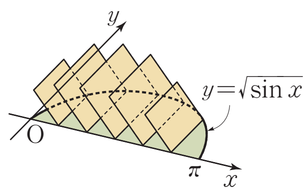
$$V=\int_0^2\frac{\sqrt{3}}{4}(x^4-4x^3+4x^2)dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{5}x^5-x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_0^2=\frac{4\sqrt{3}}{15}$$

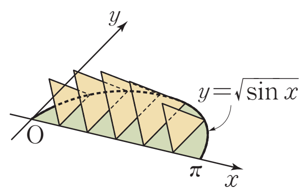
답 $\frac{4\sqrt{3}}{15}$

문제 2 곡선 $y=\sqrt{\sin x}\ (0\le x\le\pi)$와 x축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 다음과 같은 입체도형의 부피를 구하여라.

(1) 정사각형



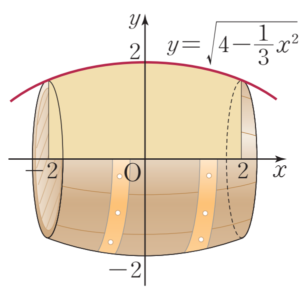
(2) 정삼각형



단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 포도주 통의 두 밑면의 중심을 x축 위에 두었을 때, x축과 수직인 평면으로 자른 단면은 반지름의 길이가 $\sqrt{4-\frac{1}{3}x^2}$인 원이라고 한다. 다음 물음에 답하여라. (단, 포도주 통의 두께는 무시한다.)



(1) 포도주 통의 부피를 구하여라.

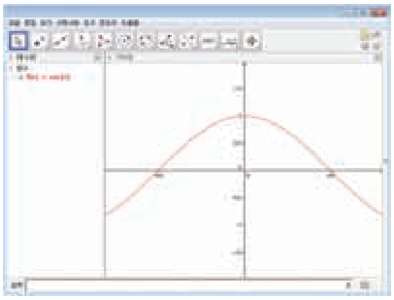
(2) 세워져 있는 포도주 통 깊이의 $\frac{1}{4}$만큼 포도주가 들어 있을 때, 포도주의 부피를 구하여라.

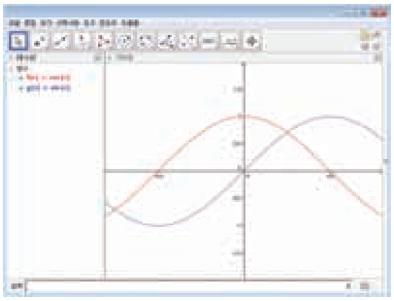
삼각함수의 정적분을 구하여 보자.

기하 작도용 소프트웨어를 이용하면 부정적분 및 정적분을 쉽게 구할 수 있다.

1 함수 $f(x)=\cos x$의 부정적분을 구하여 보자.

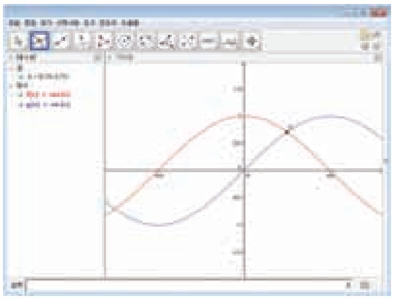
1. 화면의 아래쪽에 있는 입력창에 '$f(x)=\cos(x)$'를 입력하고 Enter키를 누르면 다음 그림과 같이 함수 $f(x)=\cos x$의 그래프가 그려진다.
2. 입력창에 '적분[$f(x)$]'를 입력하고 Enter키를 누르면 함수 $f(x)$의 부정적분 중에서 원점 O를 지나는 함수 $g(x)=\sin x$의 그래프가 그려진다.

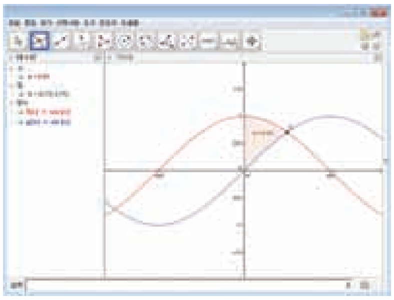




2 이제 두 함수 $f(x)=\cos x$, $g(x)=\sin x$의 그래프와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여 보자.

1. 도구상자에서 '두 대상의 교점'을 선택하고 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프를 각각 클릭하여 교점 $(0.79,\ 0.71)$을 구한다.
2. 입력창에 '적분[$f(x)$, $g(x)$, 0, 0.79]'를 입력하면 두 함수 $f(x)=\cos x$, $g(x)=\sin x$의 그래프와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있다.





[해답 p.218]

중단원 기초

1 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

01 넓이
곡선과 x축 사이의 넓이

(1) $y=\cos x\ (0\le x\le\pi)$, x축

(2) $y=\sqrt{x}$, x축, $x=1$, $x=2$

(3) $y=e^{x}-1$, x축, $x=-1$, $x=1$

2 다음 곡선과 직선 또는 곡선과 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

01 넓이

(1) $y=\dfrac{2}{x}$, $y=-x+3$

(2) $y=\cos x$, $y=\sin x\ (0\le x\le 2\pi)$

3 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

01 넓이

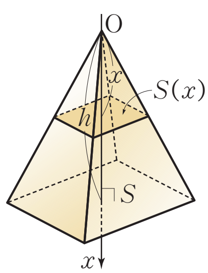
(1) $y=\sqrt{x+1}-1$, y축, $y=-1$, $y=1$

(2) $y=\ln x$, $y=x$, $y=1$, $y=3$

4 높이가 10 cm인 어떤 그릇에 물을 부으면 물의 깊이가 x cm일 때 수면은 한 변의 길이가 $(x+2)$ cm인 정사각형 모양이라고 한다. 이 그릇에 물을 가득 담을 때, 담긴 물의 부피를 구하여라. (단, 그릇의 두께는 무시한다.)

02 부피

5 오른쪽 그림과 같이 밑면의 넓이가 S이고 높이가 h인 사각뿔이 있다. 이 사각뿔의 꼭짓점 O를 원점, 꼭짓점에서 밑면에 내린 수선을 x축으로 할 때, 다음을 구하여라.



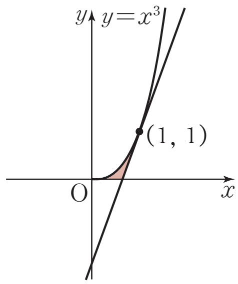
02 부피

(1) x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이 $S(x)$

(2) 정적분을 이용한 사각뿔의 부피 V

중단원 기본

1 곡선 $y=x^3$ $(x\geq 0)$과 이 곡선 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.



01 넓이
곡선과 x축 사이의 넓이

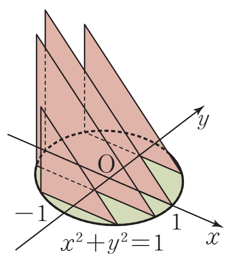
2 곡선 $y=\sqrt{x}$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 곡선 $y=\sqrt{ax}$ $(a>0)$에 의하여 이등분될 때, a의 값을 구하여라.

01 넓이

3 두 곡선 $y=\ln x$, $y=-\ln x$와 두 직선 $y=-1$, $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

01 넓이
두 곡선 사이의 넓이

4 원 $x^2+y^2=1$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 y축에 수직인 평면으로 자른 단면이 직각이등변삼각형일 때, 입체도형의 부피를 구하여라.



02 부피

5 정적분을 이용하여 다음의 부피를 구하는 방법을 설명하여라.

(1) 밑면의 반지름의 길이가 r이고, 높이가 h인 원뿔

(2) 반지름의 길이가 r인 구

02 부피

중단원 실력

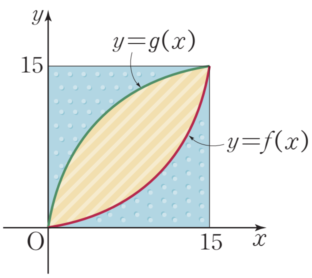
1 곡선 $y=(x-1)(x+1)(x+a)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 최소로 하는 실수 a의 값을 구하여라. (단, $-1<a<1$)

01 넓이
곡선과 x축 사이의 넓이

2 곡선 $y=\cos x$ $\left(0\le x\le \frac{\pi}{2}\right)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 곡선 $y=a\sin x$가 이등분할 때, 양수 a의 값을 구하여라.

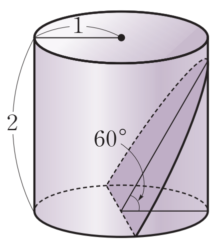
01 넓이

3 오른쪽 그림과 같이 정사각형 모양의 타일이 좌표평면 위의 x축, y축과 일치되게 놓여 있다. 이 타일에 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$를 경계로 하여 노란색과 파란색이 칠해지는 부분의 넓이의 비가 $2:3$일 때, $\int_0^{15} g(x)dx$의 값을 구하여라. (단, 함수 $y=g(x)$는 함수 $y=f(x)$의 역함수이다.)



01 넓이

4 밑면의 반지름의 길이가 1이고, 높이가 2인 원기둥이 있다. 이 밑면의 지름을 포함하고 밑면과 60°를 이루는 평면으로 원기둥을 자를 때 생기는 입체도형 중에서 작은 쪽의 부피를 구하여라.

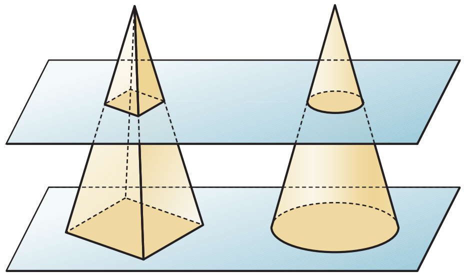


02 부피

수행 과제

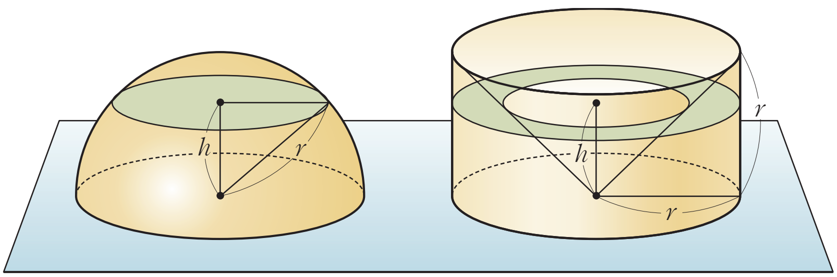
카발리에리 원리

이탈리아의 수학자 카발리에리(Cavalieri, F. B. ; 1598～1647)는 “불가분량의 기하학”에서 평면의 넓이와 부피를 구하는 카발리에리 원리를 확립하였다.
입체도형에 관한 카발리에리 원리는 다음과 같다.



> 두 입체도형을 하나의 정해진 평면과 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이의 비가 $m : n$이면 두 입체도형의 부피의 비도 $m : n$이다.

다음 [그림 1]은 반지름의 길이가 r인 반구이고, [그림 2]는 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 r인 원기둥에서 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 r인 원뿔을 잘라 낸 것이다.



[그림 1] [그림 2]

| 과 제 | 1 [그림 1]과 [그림 2]에서 색칠된 부분은 밑면으로부터 높이가 h인 지점을 밑면과 평행인 평면으로 자른 단면이다. 이때 두 단면의 넓이를 각각 구하여 보자.

| 과 제 | 2 카발리에리 원리를 이용하여 [그림 1]과 [그림 2]의 입체도형의 부피를 구하여 보자.

| 과 제 | 3 카발리에리 원리가 성립함을 정적분을 이용하여 증명하여 보자.

대단원 학습 내용 정리

1 여러 가지 함수의 부정적분

x^n (n은 실수)의 부정적분

(1) $n \neq -1$일 때, $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$

(2) $n=-1$일 때, $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C$

삼각함수의 부정적분

(1) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

(2) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

(3) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$

(4) $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$

지수함수의 부정적분

(1) $\int e^x dx = e^x + C$

(2) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ (단, $a>0$, $a \neq 1$)

2 치환적분법

치환적분법

미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

$\frac{f'(x)}{f(x)}$의 부정적분

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+C$$

3 부분적분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

4 여러 가지 함수의 정적분

정적분의 치환적분법

구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속이고 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$이면

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

정적분의 부분적분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고, $f'(x)$, $g'(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

5 넓이

곡선과 x축 사이의 넓이

함수 $y=f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S = \int_a^b |f(x)|dx$$

곡선과 y축 사이의 넓이

함수 $x=g(y)$가 구간 $[c, d]$에서 연속일 때, 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S = \int_c^d |g(y)|dy$$

두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S = \int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

6 부피

구간 $[a, b]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체의 부피 V는

$$V = \int_a^b S(x)dx \text{ (단, } S(x)\text{는 구간 } [a, b]\text{에서 연속)}$$

용어와 기호 치환적분법, 부분적분법

대 / 단 / 원 평가 문제

선택형

1 함수 $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$ 의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 부정적분 $\int g(x)dx$를 구하면?

① $\ln(x-1)+C$ ② $\ln|x-1|+C$
③ $\ln(x+1)+C$ ④ $\ln|x+1|+C$
⑤ $x+\ln|x|+C$

2 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (x, y)에서 접선의 기울기가 $\cos x-\sin x$라고 한다. 이 곡선이 원점을 지날 때, $f(\pi)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

3 함수 $f(x)=\int(1-\cos x)^2\sin x\,dx$에 대하여 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$일 때, $f(\pi)$의 값은?

① $\dfrac{7}{3}$ ② $\dfrac{8}{3}$ ③ 3
④ $\dfrac{10}{3}$ ⑤ $\dfrac{11}{3}$

4 $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$일 때, 함수

$$f(x)=-1+\sin x-\sin^2 x+\sin^3 x-\cdots$$

의 부정적분 $F(x)$를 구하면?

① $\tan x+\sec x+C$
② $\sec x-\tan x+C$
③ $\cot x+\sec x+C$
④ $\sec x-\cot x+C$
⑤ $\cot x+\csc x+C$

5 정적분 $\int_0^1|e^x-e^a|dx$의 값을 $f(a)$라고 할 때, $f(a)$가 최소가 되게 하는 a의 값은? (단, $0\le a\le 1$)

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{5}$ ③ $\dfrac{1}{4}$
④ $\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{1}{2}$

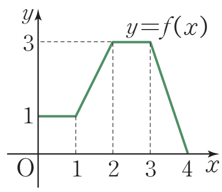
6 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\int_0^x t\sin(x-t)dt$$

일 때, $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$의 값은?

① $-\dfrac{1}{2}$ ② 0 ③ $\dfrac{1}{2}$
④ 1 ⑤ $\dfrac{3}{2}$

7 $0\le x\le 4$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 정적분 $\int_0^1 f(2x+1)dx$의 값은?



① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{3}{2}$ ③ $\dfrac{5}{2}$
④ $\dfrac{7}{2}$ ⑤ $\dfrac{9}{2}$

8 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_0^2 f(x)g(x)dx$의 값은?

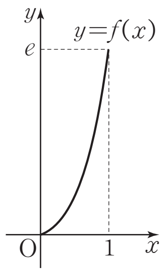
> $f'(x)=g(x)$
> $f(0)=3$, $f(2)=5$

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

9 곡선 $y=\sqrt{x}$와 이 곡선 위의 점 $(1,\ 1)$에서 그은 접선 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

10 오른쪽 그림은 함수 $f(x)=xe^x\ (0\le x\le 1)$의 그래프이다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $\int_0^e g(x)dx$의 값은?



① $e-1$ ② $e-2$
③ $2e-1$ ④ $2e-2$
⑤ $2e-3$

11 어떤 용기에 물을 넣으면 깊이가 $x(0\le x\le \pi)$일 때, 수면은 반지름의 길이가 $\sqrt{x\sin x}$인 원이라고 한다. 물의 깊이가 π일 때 용기에 담긴 물의 부피는?

① π ② 2π ③ $\frac{1}{2}\pi^2$
④ π^2 ⑤ π^2+1

12 밑면의 반지름의 길이가 a, 높이가 $2a$인 원기둥이 있다. 밑면의 중심을 지나고 밑면과 $45°$인 각을 이루는 평면으로 이 직원기둥을 자를 때 생기는 두 입체도형 중에서 작은 것의 부피는?

① $\frac{1}{3}a^3$ ② $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$
④ $\frac{2}{3}a^3$ ⑤ a^3

서답형

13 $\int_1^4 \frac{2}{x^2+2x}dx=\ln a$를 만족시키는 상수 a의 값을 구하여라.

14 함수 $f(t)=\int_0^{t-1}(x-t)e^x dx$의 최댓값을 구하여라.

서술형

15 곡선 $y=e^x$과 x축, y축 및 직선 $x=\ln 3$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분할 때, 상수 k의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

서술형

16 지름의 길이가 4인 반원을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 지름 AB에 수직인 평면으로 잘라 생기는 단면이 정사각형일 때, 입체도형의 부피를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

M+ Science

수 학 + 과 학

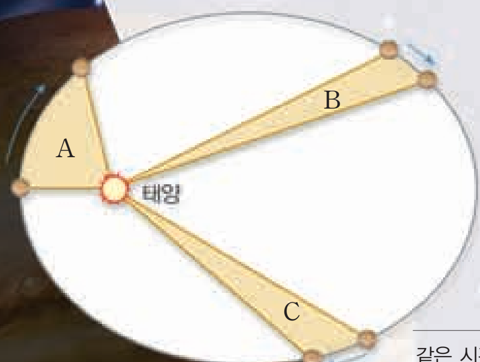
케플러의 적분

기원전 200년대 아르키메데스의 등장으로부터 17세기에 이르기까지 여러 학자들이 곡선에 둘러싸인 영역의 넓이를 구하는 방법, 이른바 적분법을 연구하여 왔다. 원이나 포물선 등 특정한 곡선에 관해서는 넓이를 구하는 방법이 발견되어 있었지만, 어느 곡선에서나 적용할 수 있는 일반적인 방법은 발견되지 않았다.

만약 넓이를 구하고 싶다면, 넓이를 구하고 싶은 영역을 곡선의 모양에 맞추어 가느다란 도형으로 분할하고 많은 계산을 해야만 했다. 이 방법은 계산이 매우 번거롭고, 엄밀하게 말하면 정확하지 않았다.

넓이를 구할 때 무한히 작은 부분으로 나누고 그것을 더한다는 아르키메데스의 적분에 대한 발상을 천문학에 응용한 사람이 독일의 천문학자 케플러(Kepler, J. ; 1571~1630)였다. 주로 그는 천문학에서 행성의 세 가지 운동 법칙의 발견으로 기억되고 있지만, 수학에서도 여러 가지 업적을 남겼다.

케플러

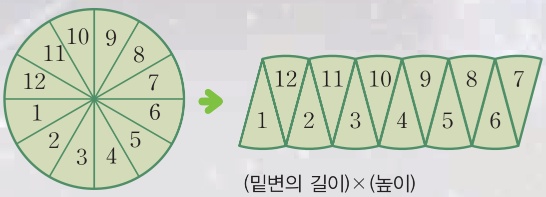


같은 시간 동안 행성이 태양 주위를 돌면서 만드는 부채꼴 A, B, C의 넓이는 서로 같다.

1604년 무렵 케플러는 스승이었던 천문학자 티코(Tycho, B. ; 1546～1601)가 남긴 막대한 화성 관측 기록을 바탕으로, 화성의 궤도를 정확하게 계산할 수 있는 방법을 여러 가지로 찾고 있었다.

그가 시행착오 끝에 이른 것이 현재 '케플러의 제2법칙'으로 알려져 있다. 그것은 '같은 시간에 행성과 태양을 연결하는 선분이 만드는 부채꼴의 넓이는 서로 같다'는 것이다.

케플러는 시행착오와 막대한 계산을 거쳐 이 결론을 얻었다. 현재와 같은 적분법이 탄생하기 전에 케플러는 태양과 화성을 잇는 직선이 지나면서 만드는 부채꼴의 넓이를 아르키메데스처럼 무한히 작은 삼각형으로 나누었다가 더하는 방법으로 계산하였다.



(밑변의 길이)×(높이)
=(원주의 반)×(반지름)
$=\pi r \times r = \pi r^2$

그는 오른쪽 그림과 같이 원을 여러 개의 부채꼴로 분할한 다음 이들을 번갈아 뒤집어 붙여서 평행사변형 모양을 만들어 원의 넓이를 계산하였다.

케플러의 아이디어가 바로 적분이기는 하지만 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 적분법의 일반적인 계산 방법을 개발한 것은 아니었으므로 이 시점에서 적분법이 완성되었다고는 할 수 없다.

그러나 케플러의 이러한 업적은 뉴턴(Newton, I. ; 1642～1727)이나 라이프니츠(Leibniz, G. W. ; 1646～1716)의 미분적분학이 꽃을 피우기 전에 카발리에리와 토리첼리(Torricelli, E. ; 1608～1647) 등에게 영감을 주었고, 적분이 발전해 나아가는 데 중요한 밑바탕이 되었다.

부 록

I 지수함수와 로그함수

|준|비|학|습| [p. 11]

1 (1) 3 (2) $\frac{1}{3}$ (3) 2 (4) 1

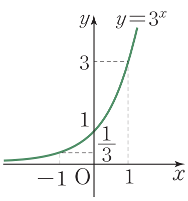
2 (1) $\log_2 16=4$ (2) $\log_{\frac{1}{3}} 27=-3$

3 (1) $f'(x)=1$ (2) $f'(x)=3x^2$

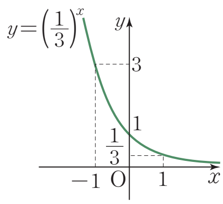
1 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프

01 지수함수와 그 그래프 [p. 13~16]

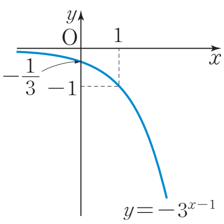
1 (1)



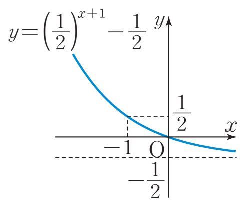
(2)



2 (1)

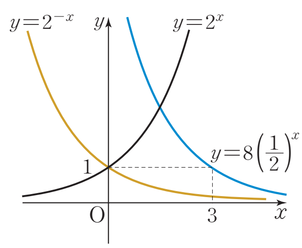


(2)



3 $y=8\left(\frac{1}{2}\right)^x=8\cdot2^{-x}=2^3\cdot2^{-x}=2^{-(x-3)}$이므로

함수 $y=8\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프는 다음과 같다.



사고력 기르기

$y=2^x$의 그래프는 ④, $y=3^x$의 그래프는 ③, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프는 ①, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프는 ②이다.

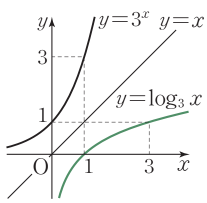
지수함수 $y=a^x$ $(a>1)$의 그래프는 a의 값이 커질수록 $x>0$일 때 y축에 가까워지고, $x<0$일 때 x축에 가까워진다.
한편 지수함수 $y=a^x$ $(0<a<1)$의 그래프는 a의 값이 작아질수록 $x>0$일 때 x축에 가까워지고, $x<0$일 때 y축에 가까워진다.

4 (1) $\sqrt[5]{3}<\sqrt[4]{9}$ (2) $\sqrt[9]{0.5^{10}}<\sqrt[10]{0.5^9}$

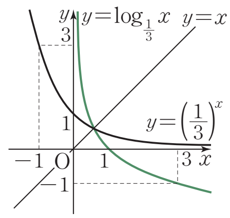
5 최댓값: 30, 최솟값: 4

02 로그함수와 그 그래프 [p. 17~20]

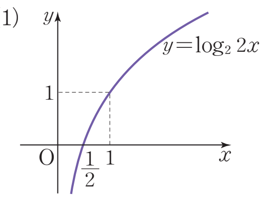
1 (1)



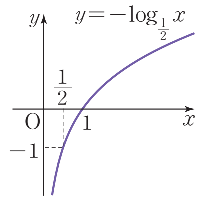
(2)



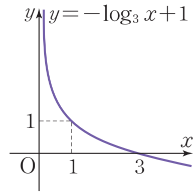
2 (1)



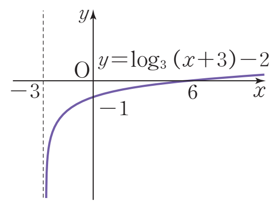
(2)



(3)



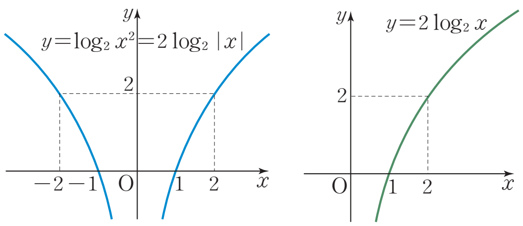
(4)



사고력 기르기

함수 $y=\log_2 x^2$, $y=2\log_2|x|$의 정의역은
$\{x\,|\,x\neq0$인 실수$\}$이고,
$x>0$일 때 $\log_2 x^2=2\log_2 x=2\log_2|x|$
$x<0$일 때 $\log_2 x^2=2\log_2(-x)=2\log_2|x|$
이므로 두 함수 $y=\log_2 x^2$, $y=2\log_2|x|$는 서로 같다.

그러나 함수 $y=2\log_2 x$의 정의역은 $\{x\,|\,x>0$인 실수$\}$이므로 앞의 두 함수와 다른 함수이다.



3 (1) $3\log_2 5>2\log_2 7$ (2) $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}7>\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}}64$

4 최댓값: -2, 최솟값: -4

03 지수함수와 로그함수의 활용 [p. 21~24]

1 $t=9$

2 21시간

3 $x=36$

4 1.2 % 이하

5 기지국에서 중계기까지의 거리를 x, 통신 신호 세기를 a라고 하면 신호의 세기가 $\frac{1}{3}$ 이하가 되는 곳에 중계기를 설치해야 하므로 $a(0.9)^x\le\frac{1}{3}a$, $(0.9)^x\le\frac{1}{3}$

양변에 상용로그를 취하면

$\log 0.9^x\le\log\frac{1}{3}$, $x(2\log 3-1)\le-\log 3$

$x\ge\frac{-\log 3}{2\log 3-1}=\frac{-0.48}{2\cdot 0.48-1}=12$

따라서 기지국에서 중계기까지의 거리는 최소 12 km 이다.

| 단원 과제 |

산성비의 수소 이온 농도를 x mol/L라고 하면 산성비의 pH는 5.6 이하이므로 $\log\frac{1}{x}\le 5.6$에서

$\log\frac{1}{x}\le\log 10^{5.6}$, $\frac{1}{x}\le 10^{5.6}$, $x\ge 10^{-5.6}$(mol/L)

따라서 산성비의 최소 수소 이온 농도는 $10^{-5.6}$ mol/L이다.
즉, 산성비에 녹아 있는 수소 이온의 최소 활동도는 $10^{-5.6}$이다.

중단원 기초 [p. 25]

1 ㄱ, ㄷ

2 ㉠, ㉡

3 ㄷ, ㄹ

4 (1) 최댓값: 3, 최솟값: 1 (2) 최댓값: 3, 최솟값: 0

5 45분 후

중단원 기본 [p. 26]

1 -3

2 $y=16\cdot 2^{2x}+4=2^4\cdot 2^{2x}+4=2^{2(x+2)}+4$
따라서 $m+n=-2+4=2$

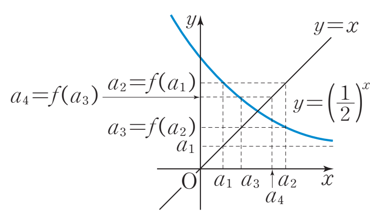
3 -2

4 함수 $y=f(x)$는 함수 $y=\log_2(x+a)$의 역함수이므로 점 $(5,\,1)$은 함수 $y=\log_2(x+a)$의 그래프 위의 점이다.
$1=\log_2(5+a)$에서 $5+a=2$, $a=-3$

5 8 m

중단원 실력 [p. 27]

1 a_2, a_3, a_4를 그래프에 나타내면 다음과 같다.

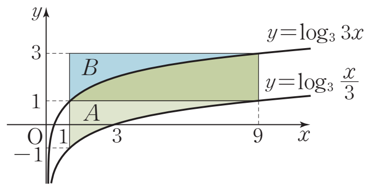


따라서 $a_3<a_4<a_2$

2 $y=4^x-2^{x+1}+4=2^{2x}-2\cdot 2^x+4$ $(-1\le x\le 2)$
$2^x=t$로 놓으면 $y=t^2-2t+4$ $\left(\frac{1}{2}\le t\le 4\right)$
따라서 $y=(t-1)^2+3$에서 $t=1$일 때 최솟값 3, $t=4$일 때 최댓값 12를 가진다.

3 $y=\log_3 3x=\log_3 x+1$, $y=\log_3 \dfrac{x}{3}=\log_3 x-1$이므로

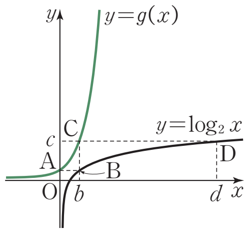
$y=\log_3 3x$의 그래프는 $y=\log_3 \dfrac{x}{3}$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.



위의 그림에서 A 영역과 B 영역의 넓이가 같으므로 구하는 도형의 넓이는 $8\times 2=16$

4 $y=g(x)$는 $y=\log_2 x$의 역함수이므로 $g(x)=2^x$

오른쪽 그림에서 점 B, C, D의 좌표를 각각 B$(b,\ 1)$, C$(b,\ c)$, D$(d,\ c)$라고 하면



$\log_2 b=1$에서 $b=2$

$g(2)=2^2=4$에서 $c=4$

$\log_2 d=4$에서 $d=2^4=16$

따라서 $\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\dfrac{16-2}{2-0}=7$

5 BOD가 매년 20 %씩 감소하므로 n년 후 이 하천의 BOD는 $8\times(1-0.2)^n$이다.

$8\times(0.8)^n\le 1$에서 $\left(\dfrac{8}{10}\right)^n\le\dfrac{1}{8}$

양변에 상용로그를 취하면

$n\log\dfrac{8}{10}\le\log 2^{-3}$, $n(3\log 2-1)\le -3\log 2$

$n\ge\dfrac{-3\log 2}{3\log 2-1}=\dfrac{-3\times 0.3}{3\times 0.3-1}=\dfrac{-0.9}{-0.1}=9$

따라서 이 하천의 수질이 1급수로서 BOD가 1 이하가 되는 것은 9년 후이다.

2 지수함수와 로그함수의 미분

01 지수함수와 로그함수의 극한 [p. 29~34]

1 (1) ∞ (2) 0

2 (1) 0 (2) 1

3 (1) ∞ (2) ∞

4 (1) 0 (2) 1 (3) 1

5 (1) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ (2) $\dfrac{1}{e^2}$ (3) $e\sqrt{e}$ (4) e

6 (1) 2 (2) $-\dfrac{1}{2}$

7 (1) $\dfrac{1}{\ln a}$ (2) $\ln a$

8 (1) $\ln 4$ (2) $\dfrac{2}{3}$ (3) $-\dfrac{1}{2}\ln 3$ (4) $\dfrac{2}{3}$

사고력 기르기

점 P의 좌표가 $(x,\ \ln(1+10x))$ $(x>0)$이므로

$\tan\theta=\dfrac{\ln(1+10x)}{x}$

점 P가 원점에 한없이 가까워질 때 $x\to 0+$이므로

$$\lim_{x\to 0+}\tan\theta=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+10x)}{x}=\lim_{x\to 0+}\ln(1+10x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\ln\{(1+10x)^{\frac{1}{10x}}\}^{10}=\ln e^{10}=10$$

02 지수함수와 로그함수의 미분 [p. 35~38]

1 (1) $y'=-3e^x$ (2) $y'=2\cdot 5^x\ln 5$

2 (1) $y'=2\cdot 3^x\ln 3+9^x\ln 9$ (2) $y'=(2e)^x(\ln 2+1)$

3 (1) $\ln 3$ (2) $3\ln 3$

창의 up

$a^{bx}=(a^b)^x$이므로

$f'(x)=(a^{bx})'=\{(a^b)^x\}'=(a^b)^x\cdot\ln a^b=b\cdot a^{bx}\ln a$

4 (1) $y'=\dfrac{3}{x}$ (2) $y'=\dfrac{1}{x\ln 2}$

5 (1) $y'=\dfrac{2}{x}-1$ (2) $y'=2x\log_3 x+\dfrac{x}{\ln 3}$

6 2

사고력 기르기

$f(x)=\ln x\ (x>0)$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{x}$

$x>0$에서 $f(x)$는 연속이고 미분가능하므로

구간 $[x,\ x+1]$에서 평균값 정리를 적용하면

$\frac{\ln(x+1)-\ln x}{(x+1)-x}=f'(c)=\frac{1}{c}$

을 만족하는 c가 구간 $(x,\ x+1)$에 적어도 하나 존재한다.

그런데 $0<x<c<x+1$일 때, $\frac{1}{x}>\frac{1}{c}>\frac{1}{x+1}$이므로

$\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$이 성립한다.

| 단원 과제 |

(1) $k=\frac{1}{7}$일 때, $f(x)=\frac{1}{7}\log x$이므로 $f'(x)=\frac{1}{7x\ln 10}$

따라서 $f'(1)=\frac{1}{7}\log e$, $f'(10)=\frac{1}{70}\log e$

(2) $10f'(10)=f'(1)$이므로 자극의 세기가 1일 때 사람이 느끼는 감각의 세기의 변화율이 자극의 세기가 10일 때 사람이 느끼는 감각의 세기의 변화율의 10배와 같다. 따라서 자극의 세기가 작을 때에는 감각의 세기의 변화율이 크므로 더 민감하게 느끼게 된다.

중단원 기초 [p.39]

1 (1) 수렴, 0 (2) 수렴, -1
(3) 발산 (4) 수렴, 1

2 (1) 발산 (2) 수렴, 1
(3) 수렴, 1 (4) 발산

3 (1) e^2 (2) $\frac{3}{2}$ (3) $\frac{3}{2}$
(4) 3 (5) $-\frac{2}{\ln 2}$ (6) $\frac{1}{\ln 3}$

4 (1) $y'=(3e)^x(\ln 3+1)$ (2) $y'=e^x(x+1)^2$
(3) $y'=3\cdot 2^x\ln 2$ (4) $y'=4\cdot 3^x(1+x\ln 3)$

5 (1) $y'=-\frac{1}{x}$ (2) $y'=\ln 3x+1$
(3) $y'=\frac{2}{x\ln 10}-1$ (4) $y'=\frac{1}{x\ln 2}$

중단원 기본 [p.40]

1 $a=2$

2 2

3 $\lim_{x\to 0}\ln(1+cx)=0$이므로 $\lim_{x\to 0}(e^{ax+b}-1)=e^b-1=0$

따라서 $b=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax+b}-1}{\ln(1+cx)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{\ln(1+cx)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}\cdot\frac{cx}{\ln(1+cx)}\cdot\frac{a}{c}$$
$$=\frac{a}{c}=3$$

따라서 $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}=3$

4 구하는 직선은 $y=2x+e^x$에 접하고 기울기가 3이므로

$y'=2+e^x$에서 $2+e^x=3$, $x=0$

접점의 좌표가 $(0,\ 1)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-1=3(x-0)$, 즉 $y=3x+1$

5 $x^2=t$로 놓으면 $x\to 1$일 때, $t\to 1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)$$
$$=2\lim_{t\to 1}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}$$
$$=2f'(1)$$

$f'(x)=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$이므로 $f'(1)=1$

따라서 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=2f'(1)=2$

중단원 실력 [p.41]

1 ㉠ ∞ ㉡ 존재하지 않는다.
㉢ 1 ㉣ e^{-2}

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㉢, ㉣이다.

2 곡선 $y=e^x-1$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ e^x-1)$에 대하여

$S_\mathrm{A}=\frac{1}{2}(e^x-1)$, $S_\mathrm{B}=\frac{1}{2}x$

$\frac{S_\mathrm{A}}{S_\mathrm{B}}=\frac{e^x-1}{x}$이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{S_\mathrm{A}}{S_\mathrm{B}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

3 $S(t)=\frac{1}{2}\cdot(3-1)\cdot\ln t=\ln t$

$t-1=x$로 놓으면 $t\to1+$일 때 $x\to0+$이므로

$$\lim_{t\to1+}\frac{\ln t}{t-1}=\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0+}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$
$$=\ln e=1$$

4 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이므로

$$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{e^{2(x-1)}-1}{x-1}$$

$x-1=t$로 놓으면

$$\lim_{t\to0}\frac{e^{2t}-1}{t}=\lim_{t\to0}\frac{e^{2t}-1}{2t}\cdot2=2$$

따라서 $f(1)=2$

5 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 연속이다.

즉, $f(1)=\lim_{x\to1-}(ax^2+1)=\lim_{x\to1+}\ln bx$이므로

$a+1=\ln b$ …… ①

$(\ln bx)'=(\ln b+\ln x)'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$에서

$f'(x)=\begin{cases}2ax & (x<1)\\ \frac{1}{x} & (x>1)\end{cases}$ 이고, $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$f'(1)=2a=1$ …… ②

①, ②에서 $a=\frac{1}{2}$, $b=e^{\frac{3}{2}}=e\sqrt{e}$

7 $$\lim_{x\to\infty}(4^x-3^x)^{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to\infty}\left[4^x\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^x\right\}\right]^{\frac{1}{2x}}$$
$$=4^{\frac{1}{2}}\cdot(1-0)^0=\sqrt{4}=2$$

9 ④ $$\lim_{x\to0}\left\{\frac{\log_2(1-x)}{x}\right\}^x=\lim_{x\to0}\{\log_2(1-x)^{\frac{1}{x}}\}^x$$
$$=\lim_{x\to0}\{-\log_2(1-x)^{-\frac{1}{x}}\}^x$$
$$=(-\log_2 e)^0=1$$

11 $$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-2h)}{h}=f'(1)+2f'(1)=3f'(1)$$

이때 $f'(x)=e^x$이므로 $3f'(1)=3e$

13 $$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right\}^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

15 $x^2-4x+3=t$로 놓으면 $t=(x-2)^2-1$

$0\le x\le3$에서 t는 $x=2$일 때 최솟값 -1, $x=0$일 때 최댓값 3을 가지므로 $-1\le t\le3$

이때 함수 $y=a^t$ $(0<a<1)$은 감소함수이므로 t의 값이 최소일 때 최댓값을 가진다.

따라서 $a^{-1}=8$이므로 $a=\frac{1}{8}$

16 처음 불순물의 양을 a라고 할 때, 정수 필터를 n번 통과시킨 후에 남아 있는 불순물의 양은

$a\times0.4^n$이므로 $a\times0.4^n\le0.02a$에서 $0.4^n\le0.02$

양변에 상용로그를 취하면

$n(\log4-1)\le\log2-2$

$$n\ge\frac{\log2-2}{2\log2-1}=\frac{0.3-2}{2\times0.3-1}=4.25$$

따라서 정수 필터를 최소한 5번 통과시켜야 한다.

대/단/원 평가 문제 [p. 44~45]

1 ④	**2** ①	**3** ⑤	**4** ④	**5** ⑤
6 ①	**7** ④	**8** ③	**9** ④	**10** ⑤
11 ③	**12** ②	**13** $\sqrt{e}$		

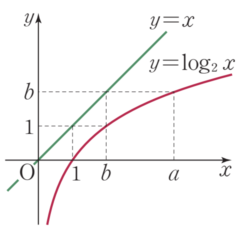
14 (1) $a=2\ln2$, $b=2-2\ln2$ (2) $a=1$, $b=-1$

15 풀이 참조 **16** 풀이 참조

4 오른쪽 그림에서 $\log_2 b=1$이므로 $b=2$

따라서 $\log_2 a=2$이므로

$a=2^2=4$



Ⅱ 삼각함수

|준|비|학|습|

[p. 49]

1 $\sin A=\frac{3}{5}$, $\cos A=\frac{4}{5}$, $\tan A=\frac{3}{4}$

2

A	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan A$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

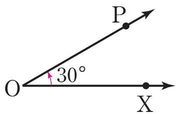
3 (1) 3　　(2) 0

1 삼각함수의 뜻과 그래프

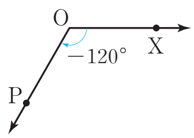
01 일반각과 호도법

[p. 51~55]

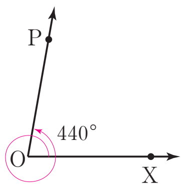
1 (1)



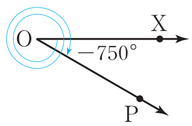
(2)



(3)



(4)

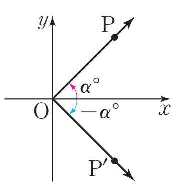


2 (1) $360^\circ\times n+70^\circ$ (단, n은 정수)
(2) $360^\circ\times n+60^\circ$ (단, n은 정수)
(3) $360^\circ\times n+310^\circ$ (단, n은 정수)
(4) $360^\circ\times n+240^\circ$ (단, n은 정수)

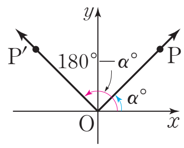
3 (1) 제4사분면　　(2) 제2사분면
(3) 제3사분면　　(4) 제1사분면

사고력 기르기

(1) x축에 대하여 대칭인 두 동경 OP와 OP′이 나타내는일반각은 각각
$\theta=360^\circ\times n+\alpha^\circ$, $\theta'=360^\circ\times m-\alpha^\circ$
(단, m, n은 정수)
이므로 $\theta+\theta'=360^\circ\times l$ (단, l은 정수)이 성립한다.



(2) y축에 대하여 대칭인 동경 OP와 OP′이 나타내는 일반각은 각각
$\theta=360^\circ\times n+\alpha^\circ$,
$\theta'=360^\circ\times m+180^\circ-\alpha^\circ$
(단, m, n은 정수)
이므로 $\theta+\theta'=360^\circ\times l+180^\circ$ (단, l은 정수)가 성립한다.



4 (1) $\frac{\pi}{3}$　　(2) $-\frac{5}{6}\pi$
(3) 120°　　(4) -270°

5 (1) $l=\pi$, $S=\frac{3}{2}\pi$　　(2) $r=\frac{8}{\pi}$, $S=\frac{8}{\pi}$

6 반지름의 길이: 3 cm, 중심각의 크기: $\frac{\pi}{3}$

02 삼각함수

[p. 56~60]

1 (1) $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\tan\theta=\sqrt{3}$
$\csc\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\sec\theta=2$, $\cot\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$
(2) $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta=-1$
$\csc\theta=\sqrt{2}$, $\sec\theta=-\sqrt{2}$, $\cot\theta=-1$
(3) $\sin\theta=-\frac{1}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\csc\theta=-2$, $\sec\theta=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\cot\theta=\sqrt{3}$
(4) $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\tan\theta=-\sqrt{3}$
$\csc\theta=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\sec\theta=2$, $\cot\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

2 (1) $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$
$\csc\theta>0$, $\sec\theta>0$, $\cot\theta>0$
(2) $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$
$\csc\theta>0$, $\sec\theta<0$, $\cot\theta<0$
(3) $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$
$\csc\theta<0$, $\sec\theta<0$, $\cot\theta>0$
(4) $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$
$\csc\theta<0$, $\sec\theta>0$, $\cot\theta<0$

3 (1) 제2사분면

(2) 제3사분면

(3) 제1사분면 또는 제3사분면

(4) 제1사분면 또는 제2사분면

4 $\sin\theta=\frac{12}{13}$, $\tan\theta=-\frac{12}{5}$

5 (1) $\frac{1}{4}$　　(2) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

사고력 기르기

(1) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ ······ ①

①의 양변을 $\cos^2\theta$으로 나누면

$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$ (단, $\cos\theta\neq0$)

따라서　$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$

(2) 등식 ①의 양변을 $\sin^2\theta$로 나누면

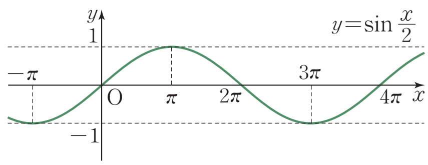
$1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$ (단, $\sin\theta\neq0$)

따라서　$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

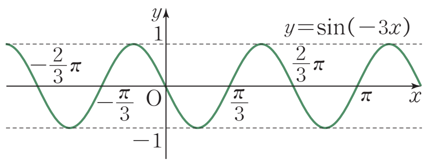
03 삼각함수의 그래프와 성질 [p. 61~73]

1 (1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

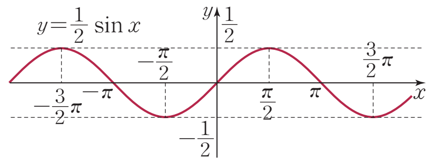
2 (1) 주기: 4π



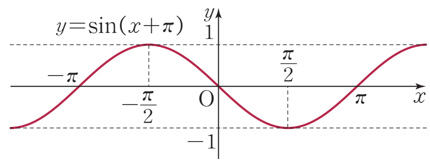
(2) 주기: $\frac{2}{3}\pi$



3 (1) 주기: 2π, 치역: $\left\{y\,\middle|\,-\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}\right\}$

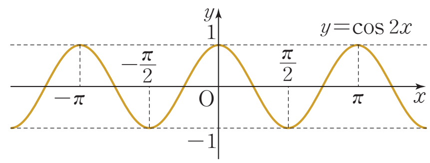


(2) 주기: 2π, 치역: $\{y\,|\,-1\le y\le1\}$

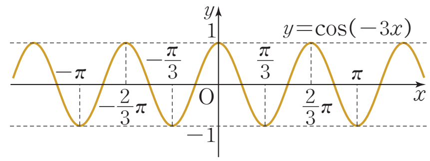


4 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

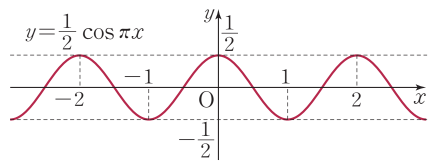
5 (1) 주기: π



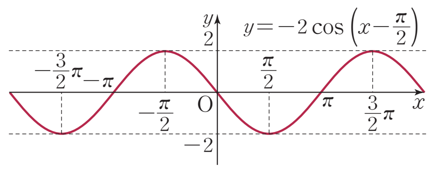
(2) 주기: $\frac{2}{3}\pi$



6 (1) 주기: 2, 치역: $\left\{y\,\middle|\,-\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}\right\}$



(2) 주기: 2π, 치역: $\{y\,|\,-2\le y\le2\}$



사고력 기르기

(1) π, 2π, 4π, 4π, π (2) $\dfrac{2\pi}{|a|}$

7 (1) -1 (2) $\sqrt{3}$

8 점 P와 P′은 x축에 대하여 대칭이므로

$x'=x$, $y'=-y$

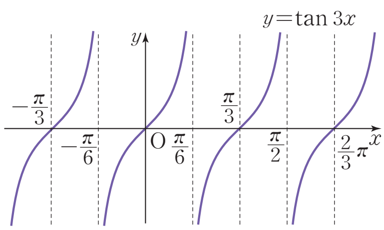
$x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$이므로

(1) $\sin(-\theta)=y'=-y=-\sin\theta$

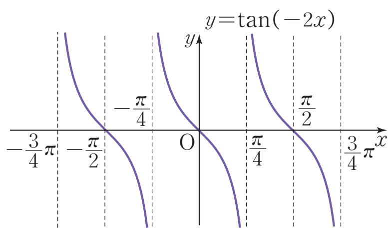
(2) $\cos(-\theta)=x'=x=\cos\theta$

(3) $\tan(-\theta)=\dfrac{y'}{x'}=-\dfrac{y}{x}=-\tan\theta$

9 (1) 주기: $\dfrac{\pi}{3}$

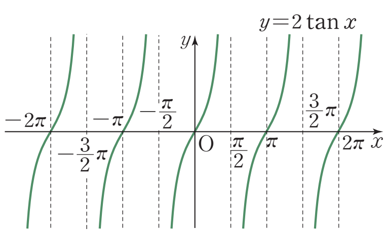


(2) 주기: $\dfrac{\pi}{2}$



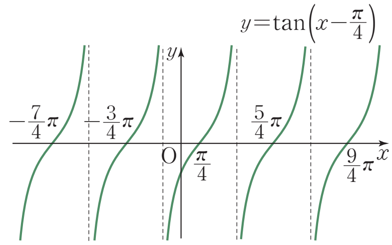
10 (1) 주기: π

점근선의 방정식: $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)

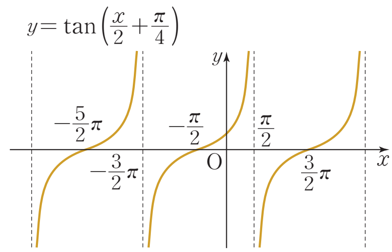


(2) 주기: π

점근선의 방정식: $x=n\pi+\dfrac{3}{4}\pi$ (n은 정수)



11 주기: 2π



12 (1) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\sqrt{3}$

13 점 P와 P′은 원점에 대하여 대칭이므로

$x'=-x$, $y'=-y$

$x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$이므로

(1) $\sin(\pi+\theta)=y'=-y=-\sin\theta$

(2) $\cos(\pi+\theta)=x'=-x=-\cos\theta$

(3) $\tan(\pi+\theta)=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{-y}{-x}=\dfrac{y}{x}=\tan\theta$

14 (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) $-\dfrac{1}{2}$ (3) -1

15 $x'=-y$, $y'=x$이고 $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$이므로

(1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=y'=x=\cos\theta$

(2) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=x'=-y=-\sin\theta$

(3) $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\dfrac{x'}{y'}=-\dfrac{x}{y}=-\cot\theta$

16 (1) 0.3420 (2) 0.2419 (3) 1.6643

사고력 기르기

(1) $\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$이므로

$\sin^2 0^\circ+\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\cdots+\sin^2 89^\circ+\sin^2 90^\circ$

$=(\sin^2 0^\circ+\sin^2 90^\circ)+(\sin^2 1^\circ+\sin^2 89^\circ)+\cdots$

$+(\sin^2 44^\circ+\sin^2 46^\circ)+\sin^2 45^\circ$

$=(\cos^2 90^\circ+\sin^2 90^\circ)+(\cos^2 89^\circ+\sin^2 89^\circ)+\cdots$

$+(\cos^2 46^\circ+\sin^2 46^\circ)+\sin^2 45^\circ=45+\dfrac{1}{2}=\dfrac{91}{2}$

(2) $\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$이므로

$\tan 1^\circ\times\tan 2^\circ\times\tan 3^\circ\times\cdots\times\tan 89^\circ$

$=\tan 1^\circ\times\tan 2^\circ\times\cdots\times\tan 45^\circ$

$\times\dfrac{1}{\tan 44^\circ}\times\cdots\times\dfrac{1}{\tan 2^\circ}\times\dfrac{1}{\tan 1^\circ}=\tan 45^\circ=1$

| 단원 과제 |

$y=395\cos\left(\dfrac{2\pi}{13}x-\dfrac{17}{15}\pi\right)+483\ (0\le x<24)$ $\cdots\cdots$ ①

(1) $\cos\left(\dfrac{2\pi}{13}x-\dfrac{17}{15}\pi\right)=1$

(i) $\dfrac{2\pi}{13}x-\dfrac{17}{15}\pi=0$일 때 $x=7\dfrac{11}{30}$(시)

(ii) $\dfrac{2\pi}{13}x-\dfrac{17}{15}\pi=2\pi$일 때 $x=20\dfrac{11}{30}$(시)

따라서 7시 22분과 20시 22분에 해수면의 높이는 $395+483=878$(cm)로 가장 높다.

(2) $\cos\left(\dfrac{2\pi}{13}x-\dfrac{17}{15}\pi\right)=-1$

(i) $\dfrac{2\pi}{13}x-\dfrac{17}{15}\pi=-\pi$일 때 $x=\dfrac{13}{15}$(시)

(ii) $\dfrac{2\pi}{13}x-\dfrac{17}{15}\pi=\pi$일 때 $x=13\dfrac{13}{15}$(시)

따라서 0시 52분과 13시 52분에 해수면의 높이는 $-395+483=88$(cm)로 가장 낮다.

(3) 주기: 13시간

04 삼각함수의 활용 [p. 74~76]

1 (1) $x=\dfrac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\dfrac{11}{6}\pi$

(2) $x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}\pi$

2 (1) $x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$ (2) $x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{11}{6}\pi$

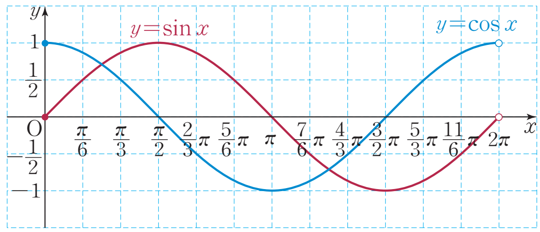
3 (1) $0\le x<\dfrac{4}{3}\pi$ 또는 $\dfrac{5}{3}\pi<x<2\pi$

(2) $\dfrac{2}{3}\pi<x<\dfrac{4}{3}\pi$

4 (1) $0\le x<\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $\dfrac{3}{4}\pi<x<2\pi$

(2) $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $\dfrac{7}{6}\pi<x<\dfrac{3}{2}\pi$

5 (1)



(2) $x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi$

(3) $0\le x<\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $\dfrac{5}{4}\pi<x<2\pi$

사고력 기르기

$2\cos^2 x+(2-\sqrt{2})\cos x-\sqrt{2}\le 0\ (0\le x<2\pi)$ $\cdots\cdots$ ①

$\cos x=t\ (-1\le t\le 1)$라고 하면

$2t^2+(2-\sqrt{2})t-\sqrt{2}\le 0,\ -1\le t\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$-1\le\cos x\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ (0\le x<2\pi)$를 풀면 $\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{7}{4}\pi$

중단원 기초 [p. 77]

1 (1) $\dfrac{\pi}{4}$ (2) $-\dfrac{7}{3}\pi$ (3) 135° (4) -240°

2 호의 길이: 4π, 넓이: 12π

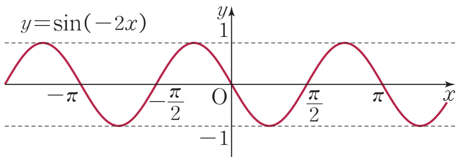
3 (1) $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$, $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$, $\tan\theta=\dfrac{4}{3}$

(2) $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$, $\tan\theta=-\sqrt{3}$

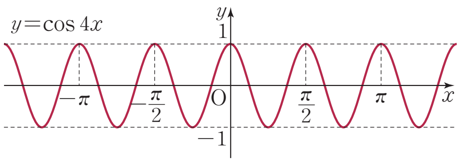
(3) $\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\theta=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$

(4) $\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta=-1$

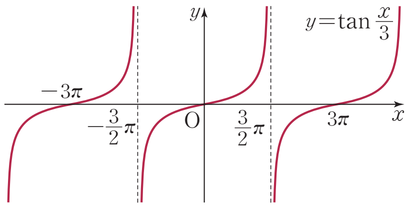
4 (1) 주기: π



(2) 주기: $\dfrac{\pi}{2}$



(3) 주기: 3π



5 (1) $x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$

(2) $x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{7}{4}\pi$

(3) $x=\dfrac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\dfrac{7}{4}\pi$

(4) $0\le x<\dfrac{7}{6}\pi$ 또는 $\dfrac{11}{6}\pi<x<2\pi$

(5) $\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{7}{4}\pi$

(6) $\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $\dfrac{5}{4}\pi<x<\dfrac{3}{2}\pi$

중단원 기본

[p. 78]

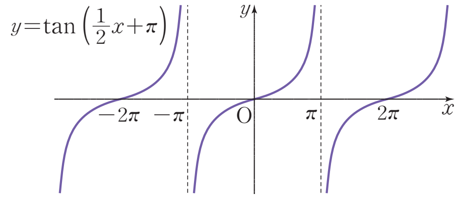
1 $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$

2 (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) 2

3 (1) 0 (2) 2

4 $a=2$, $b=2$

5 주기: 2π



6 $h=\cos\dfrac{\theta}{2}$이므로 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le\cos\dfrac{\theta}{2}\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 $\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{\theta}{2}\le\dfrac{\pi}{4}$이므로 $\dfrac{\pi}{3}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

중단원 실력

[p. 79]

1 (1) $2400°$

(2) $\dfrac{10}{9}\pi$

2 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=a$ …… ①

$\sin\theta\cos\theta=-a^2$ …… ②

① 의 양변을 제곱하면

$1+2\sin\theta\cos\theta=a^2$ …… ③

② 를 ③ 에 대입하면 $1-2a^2=a^2$, $a=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3 (1) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$

(2) $\sin(\alpha-\beta)=-\cos 2\alpha$

4 $y=\sin\dfrac{\pi}{4}x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$이므로

$y=\sin\dfrac{\pi}{4}x$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표 중에서 양의 최솟값은 4이다.

또 $\overline{BC}=2$이므로 두 점 B, C의 좌표를 각각 $(b,\ 0)$, $(b+2,\ 0)$으로 놓으면 $b=1$

따라서 $B(1,\ 0)$, $C(3,\ 0)$이므로 $A\left(1,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

그러므로 직사각형 ABCD의 넓이는 $2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

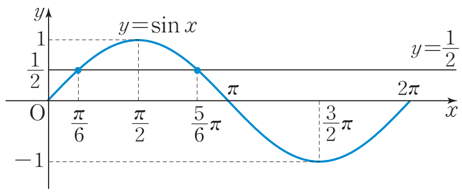
5 탑승한 칸과 원의 중심을 이은 반지름이 지면과 평행한 시각을 기준으로 시각 t에서 탑승한 칸의 높이 y m는

$y=10\sin\frac{2}{3}\pi t+11$

$10\sin\frac{2}{3}\pi t+11\geq 16\,(0\leq t\leq 3)$에서

$\sin\frac{2}{3}\pi t\geq\frac{1}{2}$ $\cdots\cdots$ ①

$\frac{2}{3}\pi t=x$로 놓으면 $0\leq x\leq 2\pi$이고 $y=\sin x$와 $y=\frac{1}{2}$의 그래프는 다음과 같다.



$\sin x\geq\frac{1}{2}$의 해는 $\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{5}{6}\pi$이므로

①의 해는 $\frac{\pi}{6}\leq\frac{2}{3}\pi t\leq\frac{5}{6}\pi$

따라서 $\frac{1}{4}\leq t\leq\frac{5}{4}$이므로 탑승한 칸이 지상에서 16 m 이상인 곳에 1분 동안 있게 된다.

5 (1) $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)$ (2) $2\sin\left(\theta+\frac{5}{3}\pi\right)$

6 (1) 최댓값: $\sqrt{2}$, 최솟값: $-\sqrt{2}$, 주기: 2π
(2) 최댓값: 2, 최솟값: -2, 주기: 2π

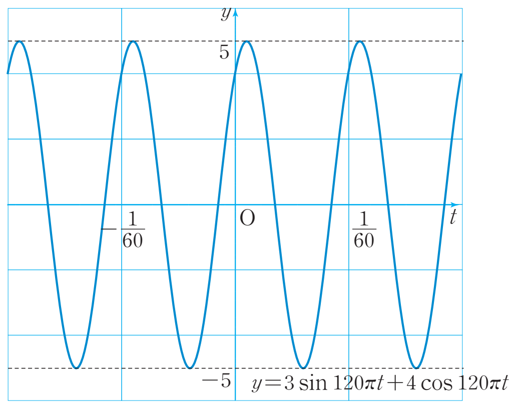
| 단원 과제 |

(1) $3\sin 120\pi t+4\cos 120\pi t=5\sin(120\pi t+\alpha)$

$\left(\text{단, }\cos\alpha=\frac{3}{5},\ \sin\alpha=\frac{4}{5},\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 최댓값은 5, 최솟값은 -5, 주기는 $\frac{1}{60}$

(2)



2 삼각함수의 미분

01 삼각함수의 덧셈정리 [p. 81~87]

1 (1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
(3) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2 (1) $2+\sqrt{3}$ (2) $-2-\sqrt{3}$

3 (1) $\frac{-1-2\sqrt{6}}{6}$ (2) $\frac{-\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6}$
(3) $\frac{-9\sqrt{3}-8\sqrt{2}}{5}$

4 45°

02 삼각함수의 극한 [p. 88~92]

1 (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) 0 (3) $\sqrt{3}$

2 (1) 2 (2) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

3 (1) 0 (2) 0

4 (1) $\frac{3}{2}$ (2) $\frac{4}{5}$
(3) $\frac{3}{4}$ (4) $\frac{2}{5}$

5 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 1
(3) 1 (4) -1

창의 up

(1) 내접하는 정n각형의 둘레의 길이는 삼각형 ABO에서

$\overline{AB}=r\sin\frac{\pi}{n}$이므로　$f(n)=2nr\sin\frac{\pi}{n}$

외접하는 정n각형의 둘레의 길이는 삼각형 ACO에서

$\overline{AC}=r\tan\frac{\pi}{n}$이므로　$g(n)=2nr\tan\frac{\pi}{n}$

(2) $x=\frac{1}{n}$로 놓으면 $n \to \infty$일 때, $x \to 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}f(n)=\lim_{n\to\infty}2nr\sin\frac{\pi}{n}=\lim_{x\to0}\frac{2r\sin\pi x}{x}=2\pi r$$

$$\lim_{n\to\infty}g(n)=\lim_{n\to\infty}2nr\tan\frac{\pi}{n}=\lim_{x\to0}\frac{2r\tan\pi x}{x}=2\pi r$$

$f(n)<l<g(n)$이고 $\lim_{n\to\infty}f(n)=\lim_{n\to\infty}g(n)=2\pi r$이므로

$\lim_{n\to\infty}l=2\pi r$

03 사인함수와 코사인함수의 미분 [p. 93~94]

1 (1) $y'=\cos x-\sqrt{3}\sin x$　(2) $y'=\cos^2 x-\sin^2 x$

2 $-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

4 (1) $y'=-\sin x-\cos x$　(2) $y'=\sin x+x\cos x$

중단원 기초 [p. 95]

1 (1) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　(2) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(3) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　(4) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

(5) $2-\sqrt{3}$　(6) $2+\sqrt{3}$

2 (1) $5\sin(\theta+\alpha)$ $\left(\text{단, } \cos\alpha=\frac{4}{5},\ \sin\alpha=\frac{3}{5}\right)$

(2) $2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)$

3 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$　(2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) 5　(4) $\frac{3}{2}$

(5) $-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$　(6) -1

중단원 기본 [p. 96]

1 (1) $-\frac{33}{65}$　(2) $-\frac{16}{65}$　(3) $-\frac{33}{56}$

2 1

3 $y=3\sin x-2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$=3\sin x-2\left(\cos x\cos\frac{\pi}{6}+\sin x\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=3\sin x-\sqrt{3}\cos x-\sin x$

$=2\sin x-\sqrt{3}\cos x$

$=\sqrt{7}\sin(x+\alpha)$ $\left(\text{단, } \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{7}},\ \sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)$

최댓값: $\sqrt{7}$, 최솟값: $-\sqrt{7}$, 주기: 2π

4 (1) 6　(2) $\frac{3}{2}$　(3) 2　(4) -4

5 $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

중단원 실력 [p. 97]

1 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}$　…… ①

$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$　…… ②

①, ②의 양변을 각각 제곱하면

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{4}$

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$

두 식의 양변을 각각 더하면

$2+2(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta)=\frac{3}{4}$

$\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta=-\frac{5}{8}$

따라서　$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{5}{8}$

2 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$이므로 삼각형 APB에서

$\angle PAB=\theta$로 놓으면 $\overline{AP}=2\cos\theta$, $\overline{BP}=2\sin\theta$

$2\overline{AP}+3\overline{BP}=4\cos\theta+6\sin\theta=\sqrt{52}\sin(\theta+\alpha)$

$\left(\text{단, } \cos\alpha=\frac{6}{\sqrt{52}},\ \sin\alpha=\frac{4}{\sqrt{52}}\right)$

따라서 최댓값은 $2\sqrt{13}$

3 $\overline{BH}=\overline{OB}-\overline{OH}=8-8\cos\theta$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{BH}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{8(1-\cos\theta)}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{8\sin^2\theta}{\theta^2}\times\frac{1}{1+\cos\theta}\right)=4$$

4 $f'(x)=-\sin x$이므로

ㄱ $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$

$=f'(0)=-\sin 0=0$

ㄴ $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$

ㄷ $f'\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x=-f(x)$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

대/단/원 평가 문제 [p.100~101]

1 ③	2 ③	3 ①	4 ③	5 ②
6 ③	7 ⑤	8 ④	9 ②	10 ③
11 ①	12 6 cm, $\frac{\pi}{3}$		13 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi$	
14 풀이 참조		15 풀이 참조		

4 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{5}{3}$, $\tan\alpha\tan\beta=\frac{2}{3}$

따라서 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=5$

9 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)}{x^3}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{\cos x-1}{x^2\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{-\sin^3 x}{x^3}\times\frac{1}{\cos x(\cos x+1)}\right\}=-\frac{1}{2}$$

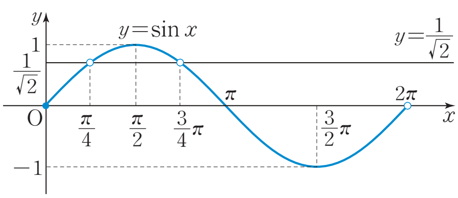
10 $x\to0$일 때, (분모)$\to0$이므로 $b=0$

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{ax}=\frac{3}{a}=3$, $a=1$

따라서 $a+b=1$

13 부등식 $\sin x>\frac{1}{\sqrt2}$의 해는 $y=\sin x$의 그래프가 직선

$y=\frac{1}{\sqrt2}$보다 윗부분에 있는 x값의 범위이다.



따라서 부등식 $\sin x>\frac{1}{\sqrt2}$의 해는 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi$

14 $g\left(\frac{1}{2}\right)=\alpha$, $g\left(\frac{1}{3}\right)=\beta$로 놓으면

$\tan\alpha=\frac{1}{2}$, $\tan\beta=\frac{1}{3}$이므로

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$

$\theta=\alpha+\beta$이므로 $\sin\theta=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt2}{2}$

15 $\overline{AC}=10\tan\theta$, $\overline{CH}=\overline{AC}\sin\theta=\dfrac{10\sin^2\theta}{\cos\theta}$

따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{CH}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{10\sin^2\theta}{\theta^2\cos\theta}=10$

Ⅲ 미분법

|준|비|학|습| [p.107]

1 (1) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{2(x+h)+1\}-(2x+1)}{h}=2$

(2) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

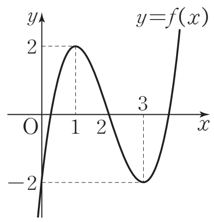
$=\lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)^2+(x+h)\}-(x^2+x)}{h}$

$=2x+1$

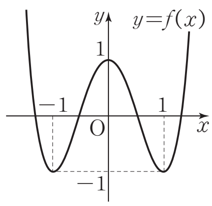
2 (1) $y'=3^x\ln 3$ (2) $y'=\frac{1}{x\ln 3}$

(3) $y'=2\cos x$ (4) $y'=-3\sin x$

3 (1)



(2)



1 여러 가지 미분법

01 함수의 몫의 미분법 [p.109~111]

1 (1) $y'=-\frac{2}{x^3}$ (2) $y'=-\frac{3x^2+1}{(x^3+x)^2}$

(3) $y'=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$ (4) $y'=\frac{2x}{(x+1)^3}$

2 (1) $y'=-\frac{4}{x^3}$ (2) $y'=-\frac{15}{x^6}$

(3) $y'=1-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^4}$

3 (1) $(\csc x)'=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}=-\csc x\cot x$

(2) $(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x$

(3) $(\cot x)'=\left(\frac{1}{\tan x}\right)'=\frac{-\sec^2 x}{\tan^2 x}=-\csc^2 x$

|단원 과제|

$\frac{dF_1}{dv}=\frac{132400}{(340-v)^2}$, $\frac{dF_2}{dv}=-\frac{132400}{(340+v)^2}$

02 합성함수의 미분법 [p.112~113]

1 (1) $y'=-3(5-x)^2$ (2) $y'=5(x^2+3x)^4(2x+3)$

(3) $y'=\frac{2}{(4-x)^3}$ (4) $y'=\frac{-3(2x-1)}{(x^2-x+1)^4}$

사고력 기르기

(1) $u=ax+b$로 놓으면 $\frac{du}{dx}=a$이므로

$\{f(ax+b)\}'=\frac{d}{dx}f(ax+b)=\frac{d}{du}f(u)\cdot\frac{du}{dx}$

$=f'(u)\cdot a=af'(ax+b)$

(2) $u=f(x)$로 놓으면 $y=u^n$이고 $\frac{du}{dx}=f'(x)$이므로

$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

$=n\cdot u^{n-1}\cdot f'(x)=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$

03 역함수의 미분법 [p.114~120]

1 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ (2) $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{4\sqrt[4]{(3x-6)^3}}$

2 (1) $y'=\frac{5}{2}\sqrt{x^3}$ (2) $y'=\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$ (3) $y'=-\frac{2}{5\sqrt[5]{x^7}}$

3 (1) $y'=\frac{10}{3}\sqrt[3]{(2x+1)^2}$ (2) $y'=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$

사고력 기르기

승현이가 답을 맞혔다.

예 함수 $f(x)=e^x$일 때,

$f'(x)=e^x$이므로 $\{f'(x)\}^{-1}=\ln x$

한편 $f^{-1}(x)=\ln x$이므로 $\{f^{-1}(x)\}'=\frac{1}{x}$

따라서 $\{f'(x)\}^{-1}\neq\{f^{-1}(x)\}'$

4 (1) $y'=e^{x^2+x+1}(2x+1)$ (2) $y'=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$

(3) $y'=-2\cdot 3^{-2x+1}\ln 3$ (4) $y'=\frac{3^{2x}(2x\ln 3-1)}{x^2}$

5 (1) $y'=\dfrac{2(1-\ln x)}{x^2}$ (2) $y'=\dfrac{1}{x}$

(3) $y'=\dfrac{5}{(5x+3)\ln 2}$ (4) $y'=-\dfrac{1}{(\log_2 3x)^2 x\ln 2}$

6 (1) $y'=-\tan x$ (2) $y'=\dfrac{2x}{(x^2-1)\ln 2}$

7 (1) $y'=\dfrac{x^2-4}{(x-1)^4}$

(2) $y'=\dfrac{(x+2)^2(5x^2-5x-12)\sqrt{x+1}}{2(x-1)^2(x+1)}$

8 (1) $y'=2^{\pi}\cdot\pi x^{\pi-1}$ (2) $y'=x^{\sqrt{2}-1}(\sqrt{2}\ln x+1)$

9 (1) $y'=-\dfrac{1}{1+\sin x}$ (2) $y'=\dfrac{\sec x\tan x}{(1+\sec x)^2}$

10 (1) $y'=-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$

(2) $y'=-3\csc(3x+5)\cot(3x+5)$

(3) $y'=-4x\cos(x^2+1)\sin(x^2+1)$

(4) $y'=-\dfrac{3\csc^2 3x}{2\sqrt{\cot 3x}}$

04 이계도함수 [p.121~122]

1 (1) $y''=6(x+1)$

(2) $y''=\dfrac{2}{(x-1)^3}$

2 (1) $y''=-4\sin 2x$ (2) $y''=-\dfrac{1}{x^2}$

3 (1) $y''=e^x\left(\ln x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

(2) $y''=2\cos^2 x-2\sin^2 x$

(3) $y''=e^x(x^4+8x^3+12x^2)$

(4) $y''=-2\sin x-x\cos x$

4 $y'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$

$=e^{-x}(\cos x-\sin x)$

$y''=-e^{-x}(\cos x-\sin x)+e^{-x}(-\sin x-\cos x)$

$=-2e^{-x}\cos x$

따라서 $y''+2y'+2y=0$

사고력 기르기

예 함수 $f(x)=e^{-x}$일 때, $f'(x)=-e^{-x}$, $f''(x)=e^{-x}$이므로 $f''(x)=f(x)$

함수 $g(x)=\sin x$일 때, $g'(x)=\cos x$, $g''(x)=-\sin x$ 이므로 $g''(x)=-g(x)$

중단원 기초 [p.123]

1 (1) $y'=\dfrac{2}{(x+1)^2}$ (2) $y'=\dfrac{-2x+5}{(x^2-5x+1)^2}$

(3) $y'=-\dfrac{4}{x^5}$ (4) $y'=\dfrac{-x^2+18}{x^4}$

2 (1) $y'=15(5x+2)^2$ (2) $y'=-\dfrac{8}{(x-3)^5}$

3 (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$ (2) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3}{2\sqrt{1-3x}}$

4 (1) $y'=\dfrac{7}{2}x^2\sqrt{x}$ (2) $y'=-\dfrac{5}{3x^2\sqrt[3]{x^2}}$

(3) $y'=\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}$ (4) $y'=ex^{e-1}$

5 (1) $y'=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$ (2) $y'=6x\cdot 5^{3x^2}\ln 5$

(3) $y'=\dfrac{1}{x}$ (4) $y'=\dfrac{3(\log_2 x)^2}{x\ln 2}$

(5) $y'=\dfrac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$ (6) $y'=3\cos 3x$

6 (1) $y''=-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$ (2) $y''=2\cos x-x\sin x$

(3) $y''=18e^{3x}$ (4) $y''=-\dfrac{1}{x^2}$

중단원 기본 [p.124]

1 0 **2** 13 **3** $\dfrac{1}{8}$

4 $x=f(y)$이므로 $x=\tan y$, $\dfrac{dx}{dy}=\sec^2 y$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

5 55

6 $a=2$, $b=\ln 3$

중단원 실력 [p.125]

1 $g(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x^k=\lim_{n\to\infty}(x+x^2+\cdots+x^n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x(1-x^n)}{1-x}=\frac{x}{1-x}\ (0<x<1)$$

이므로 $g'(x)=\frac{(1-x)-x\times(-1)}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$

따라서 $g'\left(\frac{1}{2}\right)=4$

2 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는

$f(1)=2,\ f'(1)=3,\ g(2)=3,\ g'(2)=5$

를 만족시키고, $y'=g'(f(x))f'(x)$이므로

함수 $y=(g\circ f)(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는

$g'(f(1))f'(1)=g'(2)\times3=5\times3=15$

3 $g(2)=1,\ g'(2)=3$이므로 $f(1)=2$

따라서 $f'(1)=\frac{1}{g'(f(1))}=\frac{1}{g'(2)}=\frac{1}{3}$

4 함수 $f(x)=\ln(x^2-1)\ (x>1)$에 대하여

$f'(x)=\frac{2x}{x^2-1}$이므로

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f'(n)}{n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n}{n(n^2-1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

5 $y'=e^x(\sin 2x+2\cos 2x)$

$y''=e^x(4\cos 2x-3\sin 2x)$

이므로 모든 실수 x에 대하여

$(a+2)e^x(\sin 2x+2\cos 2x)=0$

따라서 $a=-2$

2 도함수의 활용

01 접선의 방정식 [p.127~129]

1 (1) $y=-x+3$ (2) $y=2x+5$

(3) $y=ex-1$ (4) $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi+\frac{1}{2}$

2 (1) $y=2x+1$

(2) $y=2x-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

3 (1) $y=-x,\ y=3x-4$

(2) $y=\frac{1}{e^2}x+1$

(3) $y=-x+2$

(4) $y=\frac{1}{2}x$

4 $f(x)=m\ln x$라고 하면 $f'(x)=\frac{m}{x}$

접점의 좌표를 $(a,\ m\ln a)$라고 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=\frac{m}{a}=2$ …… ①

접선의 방정식은 $y-2a\ln a=2(x-a)$

이 접선은 원점 $(0,\ 0)$을 지나므로 $-2a\ln a=-2a$

$a\neq0$이므로 $\ln a=1$에서 $a=e$

a의 값을 ①에 대입하면 $m=2e$

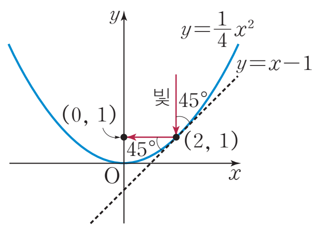
| 단원 과제 |

함수 $f(x)=\frac{1}{4}x^2$에 대하여

$f'(x)=\frac{1}{2}x$이므로

$f'(2)=1$

곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$ 위의 점 $(2,\ 1)$



에서의 접선의 방정식은

$y-1=1\cdot(x-2),\ y=x-1$

이때 직선 $y=x-1$과 빛이 이루는 각은 $45°$이므로 반사되는 빛은 x축과 평행하다.

따라서 반사된 빛이 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,\ 1)$이다.

02 함수의 그래프 [p.130~137]

1 (1) $x>-2$일 때 아래로 볼록, $x<-2$일 때 위로 볼록

(2) $x>-2$일 때 아래로 볼록, $x<-2$일 때 위로 볼록

2 (1) $(2,\ 8)$ (2) $(-1,\ 4),\ (0,\ 3)$

(3) $(-1,\ \ln2),\ (1,\ \ln2)$

(4) $(\pi,\ 0)$

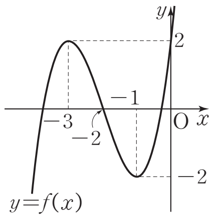
3 (1) 극댓값: 1, 극솟값: 0

(2) 극솟값: $-\dfrac{1}{2e}$

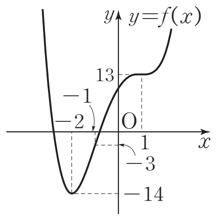
(3) 극댓값: -2, 극솟값: 2

(4) 극댓값: $\dfrac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$, 극솟값: $\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}$

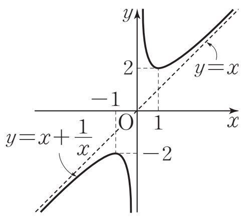
4 (1)



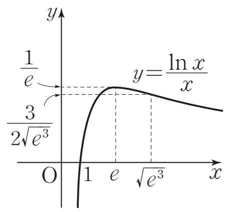
(2)



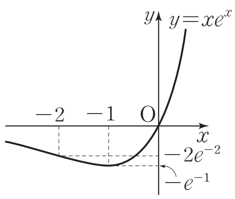
5 (1)



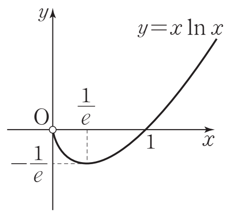
(2)



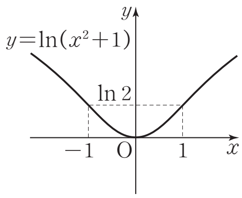
6 (1)



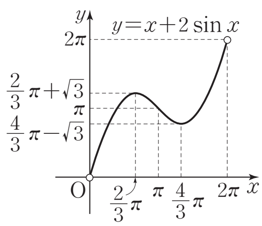
(2)



(3)



(4)



7 (1) 최댓값: 6, 최솟값: 2

(2) 최댓값: 17, 최솟값: -2

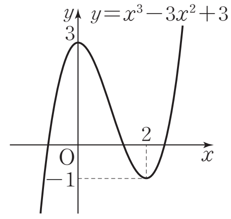
8 (1) 최댓값: $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$, 최솟값: 0

(2) 최댓값: 0, 최솟값: $-\dfrac{1}{e}$

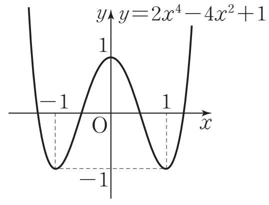
03 방정식과 부등식에의 활용

[p.138~140]

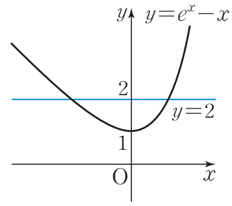
1 (1) 3개



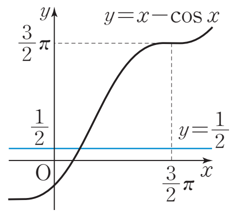
(2) 4개



(3) 2개



(4) 1개



2 (1) $-4<k<4$일 때 0개

$k=\pm4$일 때 1개

$k>4$, $k<-4$일 때 2개

(2) $k>1$일 때 2개

$k=1$일 때 1개

$k<1$일 때 0개

3 (1) $f(x)=e^{-x}-1+x$라고 하면

$f'(x)=-e^{-x}+1$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

$x>0$에서

$f(x)=e^{-x}-1+x>0$

$e^{-x}>1-x$

x	0	$\cdots$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$

(2) $f(x)=x-\ln(1+x)$라고 하면

$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

$x>0$에서

$f(x)=x-\ln(1+x)>0$

$x>\ln(1+x)$

x	0	$\cdots$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$

4 $f(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$이라고 하면

$f'(x)=-\sin x+x$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서

$f(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}>0$

$\cos x>1-\dfrac{x^2}{2}$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$-1+\dfrac{\pi^2}{8}$

창의 up

$h(x)=f(x)-g(x)$라고 하면 $f(0)=g(0)$이므로

$h(0)=f(0)-g(0)=0$

$h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$

따라서 $h(x)$는 $h(0)=0$이고 증가함수이므로

구간 $[0,\ \infty)$에서 $\quad h(x)\geq 0$

즉, $f(x)-g(x)\geq 0$이므로 $\quad f(x)\geq g(x)$

중단원 기초

[p. 141]

1 (1) $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}$

(2) $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}+\ln 2$

(3) $y=2x-\dfrac{\pi}{2}+1$

2 (1) $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$

(2) $y=ex-e$

(3) $y=x-\dfrac{3}{2}\pi$

3 (1) $x<2$일 때 위로 볼록,

$x>2$일 때 아래로 볼록

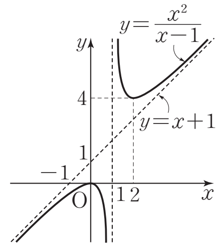
변곡점: $\left(2,\ \dfrac{2}{e^2}\right)$

(2) $0<x<\pi$일 때 위로 볼록,

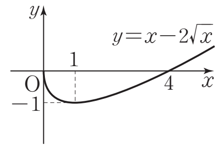
$\pi<x<2\pi$일 때 아래로 볼록

변곡점: $(\pi,\ \pi)$

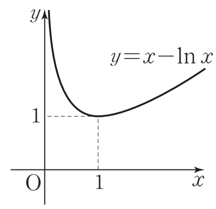
4 (1)



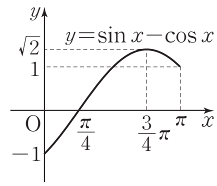
(2)



(3)



(4)



5 (1) 0 $\qquad$ (2) 1

중단원 기본

[p. 142]

1 $y=-2x+7$

2 $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$이라고 하면 $\quad f'(x)=\dfrac{1}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(a,\ \dfrac{a-1}{a}\right)$이라고 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=\dfrac{1}{a^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\dfrac{a-1}{a}=\dfrac{1}{a^2}(x-a)$ $\qquad\cdots\cdots$ ①

이 접선은 점 $(3,\ 2)$를 지나므로 $\quad a=-3$ 또는 $a=1$

a의 값을 ①에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$y=\dfrac{1}{9}x+\dfrac{5}{3}$ 또는 $y=x-1$

3 2

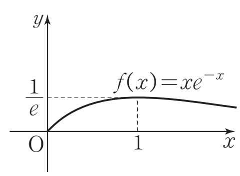
4 점 P의 좌표를 $(x,\ e^{-x})$이라고 하면 $\overline{\mathrm{PR}}=x$, $\overline{\mathrm{PQ}}=e^{-x}$

□OQPR의 넓이를 $f(x)$라고 할 때, $f(x)=xe^{-x}$이고

그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 □OQPR의 넓이의

최댓값은 $\dfrac{1}{e}$이다.



5 $h(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x}-a\ln x$라고 하면
$x>0$일 때 $h(x)\geq 0$이 성립하므로 $h(x)$의 최솟값이 0보다 크거나 같으면 된다.
$h'(x)=0$에서 $x=4a^2$

x	0	$\cdots$	$4a^2$	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		$\searrow$	$2a-a\ln 4a^2$	$\nearrow$

$h(x)$는 $x=4a^2$일 때, 최솟값 $2a-a\ln 4a^2$을 가지므로
$2a-a\ln 4a^2\geq 0$, $4a^2\leq e^2$
$(2a+e)(2a-e)\leq 0$, $0<a\leq\frac{e}{2}$

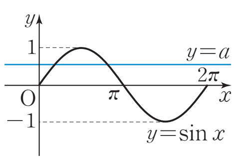
중단원 실력

[p. 143]

1 $f(x)=e^{-x^2}$이라고 하면 $f'(x)=-2xe^{-x^2}$
접점의 좌표를 $(a,\ e^{-a^2})$이라고 하면 접선의 방정식은
$y-e^{-a^2}=-2ae^{-a^2}(x-a)$
이 접선은 점 $(t,\ 0)$을 지나므로
$-e^{-a^2}=-2ae^{-a^2}(t-a)$, $2a^2-2ta+1=0$
이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 때 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으므로
$\frac{D}{4}=t^2-2>0$
$t<-\sqrt{2}$ 또는 $t>\sqrt{2}$

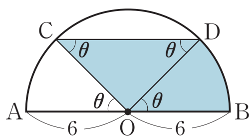
2 $f'(x)=e^{ax+b}(1+ax)$
$f(x)=xe^{ax+b}$가 $x=-1$에서 극솟값 $-\frac{1}{e}$을 가지므로
$f'(-1)=0$
$e^{-a+b}(1-a)=0$, $a=1$
$f(x)=xe^{x+b}$이고 $f(-1)=-\frac{1}{e}$이므로
$-e^{-1+b}=-e^{-1}$, $b=0$

3 $y'=2ax+1+2\cos x$
$y''=2a-2\sin x=0$



즉, $\sin x=a$를 만족시키는 x값의 좌우에서 y''의 부호가 바뀌면 곡선의 오목과 볼록이 바뀐다.
따라서 $-1<a<1$

4 $\angle\mathrm{BOD}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라고 하면 도형 OBDC의 넓이 $S(\theta)$는



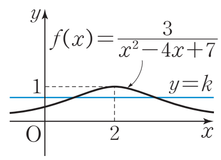
$S(\theta)=$(부채꼴 BOD의 넓이)$+$($\triangle$COD의 넓이)
$=\frac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\theta+\frac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\sin(\pi-2\theta)$
$=18(\theta+\sin 2\theta)\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$
$S'(\theta)=18(1+2\cos 2\theta)$
$S'(\theta)=0$에서 $\cos 2\theta=-\frac{1}{2}$이므로 $\theta=\frac{\pi}{3}$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$	0	$\nearrow$	$6\pi+9\sqrt{3}$	$\searrow$	9π

따라서 $S(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 극대이면서 최대이므로
도형 OBDC의 넓이의 최댓값은 $S\left(\frac{\pi}{3}\right)=6\pi+9\sqrt{3}$

5 $f(x)=\frac{3}{x^2-4x+7}$이라고 하면
$f'(x)=\frac{-3(2x-4)}{(x^2-4x+7)^2}$
$f'(x)=0$에서 $x=2$
이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$



따라서 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지는 k값의 범위는 $0<k<1$

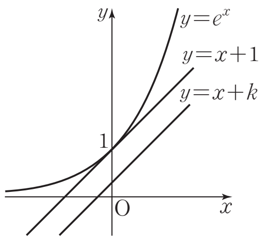
대/단/원 평가 문제

[p. 146~147]

1 ④	2 ⑤	3 ③	4 ②	5 ①
6 ③	7 ④	8 ③	9 ⑤	10 ②
11 ③	12 ④	13 0	14 −5	
15 풀이 참조		16 풀이 참조		

12 $e^x-x>k \Longleftrightarrow e^x>x+k$

$x>0$일 때, 곡선 $y=e^x$이 직선 $y=x+k$의 위쪽에 있어야 한다. 이때 $y=x+k$에 평행한 $y=e^x$의 접선을 구하면 $y=x+1$이다.



$x>0$일 때, $e^x>x+1$이므로 $k\le 1$

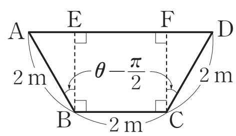
15 $f'(x)=2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}$이므로 $f'(1)=0$

$$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=f''(1)$$

$f''(x)=\dfrac{2}{x^2}+2\ln x\cdot\dfrac{-1}{x^2}$이므로 $f''(1)=2$

따라서 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{x-1}=2$

16 오른쪽 그림과 같이 수로의 단면을 등변사다리꼴 ABCD로 나타내고, 꼭짓점 B, C에서 변 AD에 내린 수선의 발을 각각 E, F라고 하면



$\angle ABE=\angle DCF=\theta-\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\overline{AE}=\overline{DF}=2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=-2\cos\theta\,(\mathrm{m})$,

$\overline{BE}=\overline{CF}=2\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sin\theta\,(\mathrm{m})$

수로의 단면의 넓이를 $S(\theta)$라고 하면

$S(\theta)=$(등변사다리꼴 ABCD의 넓이)

$\quad=4\sin\theta-4\cos\theta\sin\theta\,(\mathrm{m^2})$

$S'(\theta)=4\cos\theta-4(-\sin^2\theta+\cos^2\theta)=0$에서

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$에서 $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$

θ	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$	4	$\nearrow$	$3\sqrt{3}$	$\searrow$	0

따라서 수로의 단면의 넓이 $S(\theta)$는 $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$일 때 최대이고 최댓값은 $3\sqrt{3}\,\mathrm{m^2}$

IV 적분법

준비학습 [p. 151]

1 (1) x^3+4x^2+C (2) $\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-2x+C$

2 (1) $-\dfrac{1}{2}$ (2) $\dfrac{26}{3}$

3 $\dfrac{32}{3}$

1 여러 가지 적분법

01 여러 가지 함수의 부정적분 [p. 153~156]

1 (1) $-\dfrac{1}{4x^4}+C$ (2) $2\sqrt{x}+C$

(3) $\dfrac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C$ (4) $\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$

2 (1) $\dfrac{3}{2}x^2-\ln|x|+C$ (2) $x+4\sqrt{x}+\ln|x|+C$

3 (1) $\sin x-2\cot x+C$ (2) $-\cos x-2\cot x+C$

(3) $2\tan x-2x+C$ (4) $x+\cos x+C$

4 (1) $e^{x-1}+\dfrac{3^{x+2}}{\ln 3}+C$ (2) $\dfrac{4^x}{\ln 4}+\dfrac{2^{x+1}}{\ln 2}+x+C$

(3) $e^x+\dfrac{1}{2}x^2+C$ (4) $\dfrac{3^x}{\ln 3}-x+C$

02 치환적분법 [p. 157~161]

1 (1) $\dfrac{1}{15}(3x-5)^5+C$ (2) $-\dfrac{1}{3}\cos(3x-2)+C$

2 (1) $\sqrt{x^2+1}+C$ (2) $\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C$

3 (1) $\dfrac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

(2) $\dfrac{1}{15}(12x^2-8x-7)\sqrt{2x+1}+C$

4 (1) $\ln|x^3-2x+3|+C$ (2) $\ln|\ln x|+C$

5 (1) $-\ln|\cos x|+C$ (2) $\ln|\sin x|+C$

6 (1) $\ln\left|\dfrac{x}{x+3}\right|+C$ (2) $\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C$

7 (1) $\dfrac{1}{4}\ln|x+3|+\dfrac{3}{4}\ln|x-1|+C$
(2) $\ln|(x-2)^3(x-1)^2|+C$

03 부분적분법 [p. 162~163]

1 (1) $x\sin x+\cos x+C$ (2) $\dfrac{1}{3}xe^{3x}-\dfrac{1}{9}e^{3x}+C$

2 (1) $x\ln 3x-x+C$
(2) $\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{4}x^2+C$

사고력 기르기

부분적분법을 적용하면

$$\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx \quad \cdots\cdots ①$$

부분적분법을 한 번 더 적용하면

$$\int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx \quad \cdots\cdots ②$$

②를 ①에 대입하면

$$\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x\,dx$$

따라서 $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

04 여러 가지 함수의 정적분 [p. 164~170]

1 (1) $\ln 2$ (2) $\dfrac{2}{3}$
(3) $\dfrac{2}{\ln 3}$ (4) $\dfrac{3}{2}$

2 (1) -2 (2) $24+e^5$

3 (1) 2 (2) $e+\dfrac{1}{e}-2$

4 (1) $e-1$ (2) 2

5 (1) $-\dfrac{7}{2}$ (2) $\dfrac{8}{3}-\sqrt{3}$
(3) $\ln 5$ (4) 2

6 (1) $\ln\dfrac{1+e}{2}$ (2) $-\dfrac{7}{6}$

7 (1) $\dfrac{2}{3}$ (2) $\dfrac{1}{2}\ln 2$

8 정적분의 성질에 의하여

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{a}f(x)dx$$

$\displaystyle\int_{-a}^{0}f(x)dx$에서 $x=-t$로 놓으면 $\dfrac{dx}{dt}=-1$이므로

$$\int_{-a}^{0}f(x)dx=\int_{a}^{0}f(-t)\cdot(-1)dt=-\int_{0}^{a}f(x)dx$$

따라서 $\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)dx=-\int_{0}^{a}f(x)dx+\int_{0}^{a}f(x)dx=0$

9 (1) $\dfrac{46}{15}$ (2) 2

10 (1) 1 (2) 1

11 $\dfrac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}+1)$

| 단원 과제 |

지구의 반지름이 6400000 m이고, 국제 우주 정거장은 지구 표면으로부터 350000 m 떨어져 있으므로 소유즈 호가 필요한 에너지는

$$\int_{6400000}^{6750000}\frac{5000MG}{r^2}dr=\left[-\frac{5000MG}{r}\right]_{6400000}^{6750000}=\frac{7MG}{172800}$$

(단, $M=5.975\times10^{24}$, $G=6.6720\times10^{-11}$)

중단원 기초 [p. 171]

1 (1) $-\dfrac{2}{x}+C$ (2) $2\sqrt{x}+\ln x+C$
(3) $-\cos x+2\sin x+C$ (4) $\sec x-\cos x+C$
(5) $2e^x+\dfrac{3^x}{\ln 3}+C$ (6) $e^{x+3}+C$

2 (1) $\dfrac{1}{12}(2x-3)^6+C$ (2) $-\dfrac{2}{3}(2-x)\sqrt{2-x}+C$
(3) $\dfrac{1}{3}\sin(3x-2)+C$ (4) $-\dfrac{1}{4}e^{-4x+3}+C$
(5) $\ln(x^2-x+3)+C$ (6) $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|+C$

3 (1) $(-x-1)e^{-x}+C$

(2) $-\frac{1}{4}x\cos 4x+\frac{1}{16}\sin 4x+C$

4 (1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{1}{6}\ln\frac{5}{2}$ (3) $\frac{1}{6}$

(4) $\ln 2$ (5) $\frac{1}{2}(e^{16}-1)$ (6) $\frac{3}{2}$

5 (1) 3 (2) $4e^3+2$

중단원 기본 [p. 172]

1 $\pi+2$

2 $\ln\left|\frac{(x-3)^9}{(x-2)^7}\right|+C$

3 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 $\sin x\cos x\ge 0$, $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$에서

$\sin x\cos x\le 0$이므로

$\int_0^{\pi}|\sin x\cos x|dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\cos x\,dx$

$\cos x=t$로 놓고 치환적분법을 이용하면

$\int_0^{\pi}|\sin x\cos x|dx=\int_1^0(-t)dt-\int_0^{-1}(-t)dt=1$

4 $3x-2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3$이므로

$\int_1^2 f(3x-2)dx=\frac{1}{3}\int_1^4 f(t)dt=2$

5 $\int_0^2 e^x f(x)dx=\int_0^1 e^x(x+1)dx+\int_1^2 e^x(3-x)dx$

$=2e^2-2e$

중단원 실력 [p. 173]

1 $f(x)=x\ln x-x$

$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1=\ln x$

$f'(x)$의 역함수는 $g(x)=e^x$

$\int g(x-1)dx=\int e^{x-1}dx=e^{x-1}+C$이고,

$h(1)=1$이므로 $h(x)=e^{x-1}$, $h(2)=e$

2 $P'(x)=3x^2e^{-x^3}$에서 $-x^3=t$로 놓으면

$P(x)=\int P'(x)dx=\int 3x^2e^{-x^3}dx$

$=\int(-e^t)dt=-e^t+C=-e^{-x^3}+C$

새로운 기술로 제품을 생산한 지 1개월 후의 이익이 3천만 원이므로

$P(1)=-e^{-1}+C=-\frac{1}{e}+C=3$에서 $C=3+\frac{1}{e}$

$P(x)=-e^{-x^3}+\frac{1}{e}+3$

3 $f(x)=\int f'(x)dx=\int x\cos x\,dx$

$=x\sin x-\int\sin x\,dx=x\sin x+\cos x+C$

$0<x<\pi$에서 $f'(x)=x\cos x=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$이므로

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	(최대)	↘	

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+C=\frac{\pi}{2}$에서 $C=0$

$f(x)=x\sin x+\cos x$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4}+1\right)$

4 $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^0 f(x)dx+\int_0^{\pi}f(x)dx$

$\int_{-\pi}^0 f(x)dx$에서 $-x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-1$

또한 $x=-\pi$일 때 $t=\pi$, $x=0$일 때 $t=0$이므로

$\int_{-\pi}^0 f(x)dx=\int_{\pi}^0 f(-t)\cdot(-1)dt=\int_0^{\pi}f(-t)dt$

$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^0 f(x)dx+\int_0^{\pi}f(x)dx$

$=\int_0^{\pi}f(-t)dt+\int_0^{\pi}f(x)dx$

$=\int_0^{\pi}f(-x)dx+\int_0^{\pi}f(x)dx$

$=\int_0^{\pi}\{f(-x)+f(x)\}dx$

$=\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx=\left[2\sin\frac{x}{2}\right]_0^{\pi}=2$

5 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = k$ (k는 상수)라고 하면

$f(x) = x\cos x + k$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t\cos t + k)dt$$
$$= \Big[kt\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left(\Big[t\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt\right)$$
$$= \frac{\pi}{2}k + \frac{\pi}{2} - \Big[-\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{\pi}{2}k + \frac{\pi}{2} - 1 = k$$

$k = -1$

따라서 $f(x) = x\cos x - 1$이므로 $f(0) = -1$

2 정적분의 활용

01 넓이 [p. 175~180]

1 (1) 1 (2) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

2 (1) 2 (2) $e^2 - 1$ (3) $2 - \frac{2}{e}$

3 (1) $\frac{4}{3}$ (2) $e - \frac{1}{e} + 2$

4 $2\ln 2 - 1$

5 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $e^2 + e + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} - 4$

(3) $\pi + 2$ (4) $(\pi+1)\ln(\pi+1) - \pi + 2$

6 (1) $\frac{4}{3}$ (2) $e - 1$

7 $\frac{e}{2} - 1$

사고력 기르기

구하는 도형의 넓이를 S라고 하자.

적분변수를 x로 놓으면

$$S = \int_0^1 (e - e^x)dx = \Big[ex - e^x\Big]_0^1 = 1$$

적분변수를 y로 놓으면

$$S = \int_1^e \ln y\,dy = \Big[y\ln y\Big]_1^e - \int_1^e dy = e - \Big[y\Big]_1^e = 1$$

02 부피 [p. 181~184]

1 $96\ \text{cm}^3$

2 (1) 2 (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

| 단원 과제 |

(1) 포도주 통을 x축과 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면 $S(x) = \pi\left(4 - \frac{1}{3}x^2\right)$

따라서 포도주 통의 부피 V는

$$V = \int_{-2}^{2} \pi\left(4 - \frac{1}{3}x^2\right)dx = 2\pi\int_0^2 \left(4 - \frac{1}{3}x^2\right)dx$$
$$= 2\pi\left[4x - \frac{x^3}{9}\right]_0^2$$
$$= \frac{128}{9}\pi$$

(2) 세워져 있는 포도주 통 깊이의 $\frac{1}{4}$만큼 포도주가 들어 있을 때, 포도주의 부피 V'은

$$V' = \int_{-2}^{-1} \pi\left(4 - \frac{1}{3}x^2\right)dx$$
$$= \pi\left[4x - \frac{x^3}{9}\right]_{-2}^{-1}$$
$$= \frac{29}{9}\pi$$

중단원 기초 [p. 185]

1 (1) 2

(2) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

(3) $e + \frac{1}{e} - 2$

2 (1) $\frac{3}{2} - 2\ln 2$ (2) $4\sqrt{2}$

3 (1) 2 (2) $e^3 - e - 4$

4 $\frac{1720}{3}\ \text{cm}^3$

5 (1) $S(x) = \frac{x^2}{h^2}S$ (2) $V = \frac{1}{3}Sh$

중단원 기본 [p.186]

1 $\frac{1}{12}$

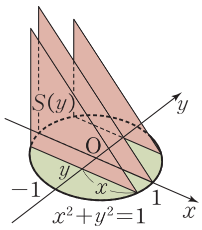
2 $\frac{1}{4}$

3 $2e+\frac{2}{e}-4$

4 직각이등변삼각형의 밑변의 길이를 l이라고 하면 $x^2+y^2=1$에서

$l=2x=2\sqrt{1-y^2}$

직각이등변삼각형의 넓이를 $S(y)$라고 하면



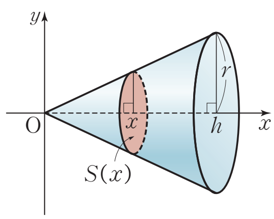
$S(y)=\frac{l^2}{2}=2(1-y^2)$

따라서 이 입체도형의 부피 V는

$V=\int_{-1}^{1}2(1-y^2)dy=2\int_{-1}^{1}(-y^2+1)dy$

$=2\left[-\frac{1}{3}y^3+y\right]_{-1}^{1}=\frac{8}{3}$

5 (1) 원뿔의 꼭짓점을 원점으로 하고, x좌표가 x인 점을 지나 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면

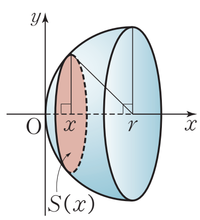


$\pi r^2 : S(x)=h^2 : x^2$이므로 $S(x)=\frac{\pi r^2}{h^2}x^2$

따라서 원뿔의 부피 V는

$V=\int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2}x^2\,dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

(2) 구 표면의 한 점을 원점으로 하고 x축이 구의 중심을 지날 때 x좌표가 x인 점을 지나 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면



$S(x)=\pi\{\sqrt{r^2-(r-x)^2}\}^2$

$=\pi(2rx-x^2)$

이므로 반구의 부피는

$\int_0^r \pi(2rx-x^2)dx=\pi\left[rx^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^r=\frac{2}{3}\pi r^3$

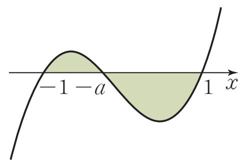
따라서 구의 부피 V는 $V=\frac{2}{3}\pi r^3\times 2=\frac{4}{3}\pi r^3$

중단원 실력 [p.187]

1 $y=(x-1)(x+1)(x+a)$

$=x^3+ax^2-x-a$

곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(a)$라고 하면



$S(a)$

$=\int_{-1}^{-a}(x^3+ax^2-x-a)dx-\int_{-a}^{1}(x^3+ax^2-x-a)dx$

$=-\frac{1}{6}a^4+a^2+\frac{1}{2}$

$S'(a)=-\frac{2}{3}a^3+2a=2a\left(-\frac{1}{3}a^2+1\right)=0$에서

$a=0,\ -\sqrt{3},\ \sqrt{3}$

따라서 $a=0$일 때 $S(a)$는 극소이면서 최소가 된다.

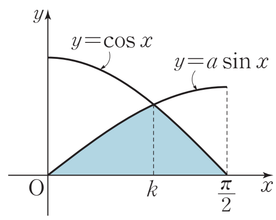
2 곡선 $y=\cos x$와 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

$y=\cos x$와 $y=a\sin x$의 교점의 x좌표를 $k\left(0\le k\le\frac{\pi}{2}\right)$라고 하면

$\cos k=a\sin k$ ...... ①

오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이가 $\frac{1}{2}$이므로



$\int_0^k a\sin x\,dx$

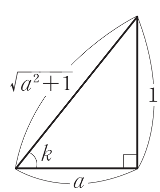
$+\int_k^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$

$=\left[-a\cos x\right]_0^k+\left[\sin x\right]_k^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{1}{2}$

$a\cos k+\sin k=a+\frac{1}{2}$ ...... ②

①에서 $\frac{\sin k}{\cos k}=\frac{1}{a}$이므로



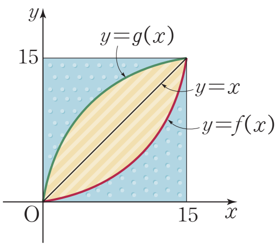
$\sin k=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}},\ \cos k=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$

를 ②에 대입하면

$a\times\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}=a+\frac{1}{2}$

따라서 $a=\frac{3}{4}$

3 노란색이 칠해진 부분의 넓이는 $\frac{2}{5}\times 15^2=90$

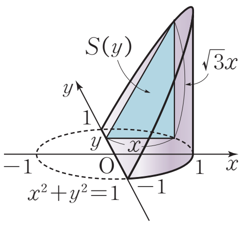


곡선 $y=g(x)$와 $y=f(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$$\int_0^{15} g(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\times 90+\frac{1}{2}\times 15^2=\frac{315}{2}$$

4 좌표평면의 원점에 밑면의 중심을 놓고 y축 위에 밑면의 지름을 놓은 다음 y축에 수직인 평면으로 이 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(y)$라고 하면



$$S(y)=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-y^2)$$

따라서 입체도형의 부피 V는

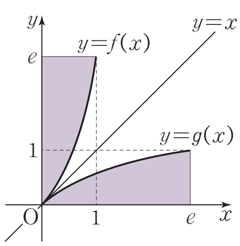
$$V=\int_{-1}^{1} S(y)dy=\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{3}}{2}(1-y^2)\,dy$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[y-\frac{1}{3}y^3\right]_{-1}^{1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

대/단/원 평가 문제 [p.190~191]

1 ② 2 ① 3 ① 4 ② 5 ⑤
6 ③ 7 ③ 8 ④ 9 ① 10 ①
11 ④ 12 ④
13 $a=2$ 14 $1-\ln 2$ 15 풀이 참조
16 풀이 참조

10 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이고 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로 다음이 성립한다.



$$\int_0^e g(x)dx=\int_0^e f(y)dy$$

그런데 x축, y축 및 두 직선 $x=1$, $y=e$로 둘러싸인 직사각형의 넓이는 e이므로

$$\int_0^e f(y)dy=e-\int_0^1 f(x)dx=e-\left(\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x dx\right)$$

$$=e-\{e-(e-1)\}=e-1$$

따라서 $\int_0^e g(x)dx=e-1$

13 $\frac{2}{x^2+2x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}$이므로

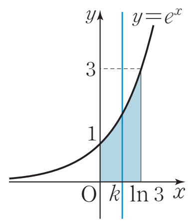
$$\int_1^4 \frac{2}{x^2+2x}dx$$

$$=\int_1^4\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\Big[\ln|x|-\ln|x+2|\Big]_1^4$$

$$=\ln 4-\ln 6+\ln 3=\ln 2$$

$a=2$

15 곡선 $y=e^x$과 x축, y축 및 직선 $x=\ln 3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는



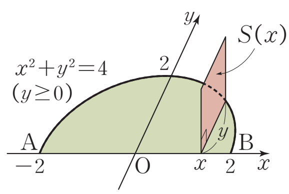
$$\int_0^{\ln 3} e^x dx=\Big[e^x\Big]_0^{\ln 3}=3-1=2$$

직선 $x=k$가 도형의 넓이를 이등분하므로

$$\int_0^k e^x dx=\Big[e^x\Big]_0^k=e^k-1=1$$

따라서 $k=\ln 2$

16 좌표평면의 x축 위에 지름 AB를 놓은 다음 x축에 수직인 평면으로 이 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면



$S(x)=y^2=4-x^2$

따라서 구하는 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_{-2}^{2} S(x)dx=\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx$$

$$=2\int_0^2(4-x^2)dx=2\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\frac{32}{3}$$

삼각함수표

각	라디안	sin	cos	tan
0°	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
1°	0.0175	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0524	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0873	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1047	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1222	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1396	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1571	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1745	0.1736	0.9848	0.1763
11°	0.1920	0.1908	0.9816	0.1944
12°	0.2094	0.2079	0.9781	0.2126
13°	0.2269	0.2250	0.9744	0.2309
14°	0.2443	0.2419	0.9703	0.2493
15°	0.2618	0.2588	0.9659	0.2679
16°	0.2793	0.2756	0.9613	0.2867
17°	0.2967	0.2924	0.9563	0.3057
18°	0.3142	0.3090	0.9511	0.3249
19°	0.3316	0.3256	0.9455	0.3443
20°	0.3491	0.3420	0.9397	0.3640
21°	0.3665	0.3584	0.9336	0.3839
22°	0.3840	0.3746	0.9272	0.4040
23°	0.4014	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4189	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4363	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4538	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4712	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4887	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.5061	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5236	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5411	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5585	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5760	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5934	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.6109	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.6283	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6458	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6632	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6807	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6981	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.7156	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.7330	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.7505	0.6820	0.7314	0.9325
44°	0.7679	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7854	0.7071	0.7071	1.0000

각	라디안	sin	cos	tan
45°	0.7854	0.7071	0.7071	1.0000
46°	0.8029	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.8203	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.8378	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.8552	0.7547	0.6561	1.1504
50°	0.8727	0.7660	0.6428	1.1918
51°	0.8901	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.9076	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.9250	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.9425	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.9599	0.8192	0.5736	1.4281
56°	0.9774	0.8290	0.5592	1.4826
57°	0.9948	0.8387	0.5446	1.5399
58°	1.0123	0.8480	0.5299	1.6003
59°	1.0297	0.8572	0.5150	1.6643
60°	1.0472	0.8660	0.5000	1.7321
61°	1.0647	0.8746	0.4848	1.8040
62°	1.0821	0.8829	0.4695	1.8807
63°	1.0996	0.8910	0.4540	1.9626
64°	1.1170	0.8988	0.4384	2.0503
65°	1.1345	0.9063	0.4226	2.1445
66°	1.1519	0.9135	0.4067	2.2460
67°	1.1694	0.9205	0.3907	2.3559
68°	1.1868	0.9272	0.3746	2.4751
69°	1.2043	0.9336	0.3584	2.6051
70°	1.2217	0.9397	0.3420	2.7475
71°	1.2392	0.9455	0.3256	2.9042
72°	1.2566	0.9511	0.3090	3.0777
73°	1.2741	0.9563	0.2924	3.2709
74°	1.2915	0.9613	0.2756	3.4874
75°	1.3090	0.9659	0.2588	3.7321
76°	1.3265	0.9703	0.2419	4.0108
77°	1.3439	0.9744	0.2250	4.3315
78°	1.3614	0.9781	0.2079	4.7046
79°	1.3788	0.9816	0.1908	5.1446
80°	1.3963	0.9848	0.1736	5.6713
81°	1.4137	0.9877	0.1564	6.3138
82°	1.4312	0.9903	0.1392	7.1154
83°	1.4486	0.9925	0.1219	8.1443
84°	1.4661	0.9945	0.1045	9.5144
85°	1.4835	0.9962	0.0872	11.4301
86°	1.5010	0.9976	0.0698	14.3007
87°	1.5184	0.9986	0.0523	19.0811
88°	1.5359	0.9994	0.0349	28.6363
89°	1.5533	0.9998	0.0175	57.2900
90°	1.5708	1.0000	0.0000	∞

용어

기호

사진 자료 출처

셔터스톡 • • 10쪽, 23쪽, 24쪽, 26쪽, 28쪽, 46쪽, 48쪽, 52쪽, 56쪽, 59쪽, 74쪽, 80쪽, 96쪽, 105쪽, 108쪽, 150쪽, 152쪽, 170쪽, 178쪽, 181쪽, 182쪽, 192쪽

아이클릭 • • 50쪽

이미지클릭 • • 102쪽, 144쪽

토픽이미지 • • 12쪽, 13쪽, 42쪽, 51쪽, 54쪽, 67쪽, 106쪽, 127쪽, 130쪽, 183쪽, 192쪽

기타 • • 일마레 펜션(http://www.jebuilmare.com) – 50쪽

인용 자료 출처

12쪽, 이상인 외 14인, 중학교 과학②, (주)지학사, 2013, pp.208~229

12쪽, 토양환경기술센터(http://www.sec.re.kr)

12쪽, 홍준의 외 3인, 살아있는 과학 교과서1, 휴머니스트, 2011, pp.158~163

13쪽, Robert A. Wallace 외 2인(이광웅 외 7인 역), 생물학-생명의 과학, 을유문화사, 2012, pp.287~304

23쪽, 이기영, 생각하며 배우는 대학물리학, 한빛미디어, 2011, pp.261~265

23쪽, Young 외 1인(대학물리학교재편찬위원회 역), 대학 물리학Ⅰ 10판, (주)북스힐, 2003, pp.592~594

24쪽, 전남대학교-금속간 화합물 재료연구실(http://www.cnu.ac.kr)

28쪽, 두산백과사전 두피디아(http://www.doopedia.co.kr)

28쪽, 송명관, 과학동아, 동아사이언스, 2012. 6., pp.48~51

32쪽, Peter Bentley(유세진 역), 숫자, 세상의 문을 여는 코드, 성균관대학교(Subook), 2008, pp.118~120

42쪽, James Stewart, Caculus 5th Edition, Thomson, 2003, pp.628~653

46쪽, Malthus(이서행 역), 인구론, 동서문화사, 2011, pp.17~27

47쪽, 두산백과사전 두피디아(http://www.doopedia.co.kr)

50쪽, 경기도 화성 제부모세마을(http://jebumose.invil.org)

80쪽, 두산백과사전 두피디아(http://www.doopedia.co.kr)

98쪽, Roger B. Nelsen, Proofs without words Ⅱ, AMS, 2000, pp.46~47

102쪽, Teun Koetsier 외 1인, Explorations in the History of Machines and Mechanism, Springer, 2012, pp.294~295

108쪽, 김영민 외 7인, 고등학교 물리Ⅱ, (주)교학사, 2012, pp.215~220

108쪽, 두산백과사전 두피디아(http://www.doopedia.co.kr)

111쪽, Larson 외 2인, Calculus 7th Edition, Houghton mifflin, 2002, pp.135

126쪽, 국민일보(http://www.kukinews.com), 2005. 10. 23.

126쪽, 남호영 외 3인, 원뿔에서 태어난 이차곡선, 수학사랑, 2012, pp.163~164

126쪽, 디스커버리 채널(http://dsc.discovery.com)

126쪽, Archimedes' Weapon, Time Magazine, 1973. 11. 26., Retrieved 2007. 8. 12.

148쪽, James Stewart, Caculus 5th Edition, Thomson, 2003, pp.294~298

152쪽, 서울신문(http://www.seoul.co.kr), 2008. 12. 15.

174쪽, 김남희 외 5인, 예비교사와 현직교사를 위한 수학교육과정과 교재연구, 경문사, 2011, pp.261~262

174쪽, 남호영, 수학동아, 동아사이언스, 2010. 10., pp.96~99

181쪽, Kevin Jackson 외 1인(정주현 역), 피라미드 상상 그 너머의 세계, 샘터, 2006, pp.8~24

188쪽, 두산백과사전 두피디아(http://www.doopedia.co.kr)

188쪽, 한국과학창의재단 사이언스올-과학백과사전(http://www.scienceall.com)

192쪽, 다카하시 슈유 외 4인(강금희 역), Newton HIGHLIGHT-뉴턴의 대발명 미분과 적분, 뉴턴코리아, 2011, pp.64~69

집필진

* 신항균 서울교육대학교 총장
이계세 경기도학생교육원 교육연구사
박상의 장충고등학교 교사
이광연 한서대학교 교수
김정화 서울고등학교 교사
서원호 청원고등학교 교감
박세원 신경대학교 교수
박문환 인천인제고등학교 교사
전제동 창원중앙고등학교 교사
신범영 청담중학교 교감
윤정호 대구과학고등학교 교사
이동흔 숭문고등학교 교사

* 표시는 집필진 책임자임

인천광역시교육청 인정도서심의회 위원

* 박규홍 서원대학교
정옥경 인천신현고등학교
김동수 신명여자고등학교
정미라 제물포고등학교
최중근 인천초은고등학교
이진 세일고등학교
양재원 인천영선고등학교
양혜순 인천부흥고등학교
권태룡 동인천고등학교
김현옥 신송고등학교
민선애 인천공항고등학교
권봉희 인천송천고등학교
서순옥 인천예술고등학교
김윤수 검단고등학교
안유진 인천진산과학고등학교
유영신 인천상정고등학교
배수아 인천산곡고등학교
박제남 인하대학교
오흥준 초당대학교
배재형 경희대학교
김성기 계산고등학교
전경환 인하대학교사범대학 부속고등학교
서동희 인천고잔고등학교
조준호 인명여자고등학교
김미경 연송고등학교
이재성 인천공항고등학교
배혜정 옥련여자고등학교
임병태 영종국제물류고등학교
이종현 작전여자고등학교
강신석 인천과학고등학교
김희경 도림고등학교
윤세정 부광고등학교
류주현 부평여자고등학교
김윤정 인천국제고등학교
김진영 인천진산과학고등학교
장은하 부개여자고등학교
박진상 인천외국어고등학교
박영경 세일고등학교
이재정 인천남동고등학교
조성현 인천원당고등학교
김복수 송도고등학교
정문자 수원대학교
이종성 인하대학교
김병학 경희대학교
김대흥 신송고등학교
허석 부개고등학교
박희성 인천영종고등학교
성미애 부개여자고등학교
전효진 가림고등학교
윤효진 인천고등학교
오경민 학익고등학교
김종오 광성고등학교
이선희 문일여자고등학교
유경민 연수여자고등학교
우연희 서운고등학교
이혜연 백석고등학교
박은희 연수고등학교
조영식 인천부흥고등학교
신은주 인일여자고등학교
김성래 광성고등학교
함유선 인천여자고등학교
박종호 안남고등학교
문정연 연수여자고등학교
임승희 인제고등학교
이대성 부광고등학교
이재원 금오공과대학교
조규근 명지대학교
이재혁 이화여자대학교
김경선 인천가정고등학교
윤기운 인천여자고등학교
한경호 학익여자고등학교
최항철 인천국제고등학교
고명호 인천국제고등학교
차요섭 인천대건고등학교
김현희 인일여자고등학교
신선희 인천청라고등학교
고아라 부평고등학교
박숭열 인천예일고등학교
김성식 부광여자고등학교
최미희 작전고등학교
김기선 인천광성중학교
홍지연 인천신현고등학교
고현숙 학익여자고등학교
문서영 인천청라고등학교
최윤호 연수고등학교
안현태 강화고등학교
김장희 인천예일고등학교
이주영 인천송천고등학교
고석구 건국대학교
류희수 경인교육대학교
오종철 군산대학교
이동환 부산교육대학교
박용희 계산고등학교
고일석 계양고등학교
김혜경 검단고등학교

* 표시는 심의회 위원장임

인천광역시교육청 인정도서 감수 위원

* 김주영 대구가톨릭대학교
김기수 경남과학고등학교
김영란 김해고등학교
박재진 경북관광고등학교
윤강준 국가수리과학연구소
임문태 서산여자고등학교
표준철 부산대학교
강미광 동의대학교
김동석 오남고등학교
나영호 김천고등학교
박호문 점촌고등학교
이상훈 충남대학교
조성진 부경대학교
하영수 이화여자대학교
강현진 숭문고등학교
김미연 진해여자고등학교
노경희 인덕원고등학교
백한식 금남고등학교
이채형 성동고등학교
조장현 서강대학교
홍석만 인항고등학교
고일석 경기과학고등학교
김미현 길주중학교녹전분교
류덕호 울진고등학교
안종록 천안오성고등학교
이효덕 산청고등학교
최은미 한남대학교

* 표시는 감수 위원 책임자임

만든 사람들

개발 책임 김영호
편집 김경수, 윤준원, 천세규, 최윤정, 김은빛, 이유희
표지 디자인 김의수
본문 디자인 박현신
삽화 김성남
컷 맥컴

인천광역시교육청에서 2013년 8월 30일 인정 승인을 하였음.

고등학교 미적분II

2014. 3. 1. 초판 발행 2015. 3. 1. 2쇄 발행 정가 원
지은이: 신항균 외 11인
발행인: (주)지학사 서울시 마포구 신촌로6길 5
인쇄인: (주)벽호 경기도 파주시 한빛로 43

이 교과서의 본문 용지는 우수 재활용 제품 인증을 받은 재활용 종이를 사용했습니다.

교과서에 대한 문의사항이나 의견이 있는 분은 한국교과서연구재단이 운영하는 **교과서민원바로처리센터**(전화 1566-8572, 누리집 주소 http://www.textbook114.com 또는 http://www.교과서114.com)에 문의하여 주시기 바랍니다.

이 도서에 게재된 저작물에 대한 보상금은 문화체육관광부 장관이 정하는 기준에 따라 **사단법인 한국복제전송저작권협회**(전화 02-2608-2800, 누리집 주소 www.korra.kr)에서 저작재산권자에게 지급합니다.

내용 관련 문의: (주)지학사 콘텐츠본부 수학팀 전화 02-330-5440 전송 02-325-8009
구입 관련 문의: (주)지학사 영업본부 영업관리팀 전화 02-330-5302 전송 02-325-8010
공급 업무 대행: 사단법인 한국검인정교과서 경기도 파주시 조리읍 당재봉로 29-28
개별 구입 안내: 누리집 주소 www.ktbook.com 전화 031-8071-7981~4 (사)한국검인정교과서
ISBN 978-89-05-04015-4 53410

고|등|학|교 미적분 Ⅱ

53410
9 788905 040154
ISBN 978-89-05-04015-4